TEMA 2: Uppgifter till gruppövning 3 och 4

1. Skapa en kolonn med 100 slumptal som är

   (a) likformigt fördelade över $(0, 1)$,

   (b) likformigt fördelade över $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

   (c) binomialfördelade med parametrar 20 och 1/3.

   Tips: Använd kommandot RANDOM.

2. **Sortering** (se boken kapitel 5.4). Ett välkänt och vanligt problem är hur man på ett så snabbt sätt som möjligt sorterar en lista av tal, ord eller annat i någon given ordning, t.ex. storleksordning, alfabetisk ordning etc. Med "snabbt" menar man oftast att man vill sortera listan med så få parvisa jämförelser som möjligt.

   En vanligt använd sorteringsalgoritm är **Quick-sort** som fungerar på följande sätt: Man väljer ett element, x, ur listan (på måfå eller enligt någon annan regel, t.ex. listans sista element) och jämför detta med alla de övriga elementen. Man får då dels reda på vilken position elementet x ska ha och placerar det där, dels åstadkommer man en uppdelning av de övriga elementen i två dellistor, en med alla element som kommer före x och en med alla element som kommer efter x. Nu upprepar man proceduren på de två dellistorna varpå två nya element placeras in på sina rätta platser och fyra nya dellistor åstadkoms. Man upprepar sedan proceduren på de nya dellistorna och fortsätter på detta sätt tills inga element återstår att sortera.

   Uppgift: Konstruera en funktionsfil "**quick.m**" som sorterar en lista med tal enligt Quick-sort-algoritmen och som också registrerar hur många parvisa jämförelser som behövdes. Jämför antalet jämförelser som behövdes med $n \log_2 n$ där n är längden på listan.

3. **Monte-Carlo-metoden** för uppskattning av areor: Antag att vi vill bestämma arean av någon yta A som är besvärlig i den meningen att vi inte klarar att analytiskt beräkna arean. Då kan man till exempel använda den s.k. Monte-Carlo-metoden: Man ritar en rektangel, R, som innesluter A. (Man bör då om möjligt se till att R inte blir alltför stor i förhållande till A.) Sedan genererar man punkter som är valda på måfå i R oberoende av varandra, säg n stycken. Sannolikheten att en given sådan punkt hamnar i A är ju

   $$p = \frac{area(A)}{area(R)},$$

   så om X är antalet punkter som hamnar i A bör man ha

   $$X \approx np = n\frac{area(A)}{area(R)},$$

   dvs

   $$area(A) \approx \frac{X}{n} area(R)$$

   och arean av R beräknar man som bekant utan svårigheter.

   Uppgift: Tillämpa Monte-Carlo-metoden för att approximativt beräkna

(a) $\int_0^2 e^{-x^2/2}dx$,

(b) Arean av unionen av de två ellipserna $x^2/4 + 4y^2 \leq 1$ och $4x^2 + y^2/4 \leq 1$.

4. **Quick-sort:** Vad är det högsta antalet jämförelser som kan behövas för Quick-sort-algoritmen? Ge ett exempel på en inkommande lista som åstadkommer detta.

   Vad är väntevärdet för antalet jämförelser om man antar att den inkommande listan är i helt slumpmässig ordning? Låt X_n vara antalet jämförelser som krävs för en lista med n element. Uttryck $\mathbf{E}[X_n]$ i termer av $\mathbf{E}[X_0], \mathbf{E}[X_1], \ldots, \mathbf{E}[X_{n-1}]$. Utnyttja denna formel och det faktum att $\mathbf{E}[X_0] = 0$ till att med MATLABs hjälp beräkna $\mathbf{E}[X_1], \mathbf{E}[X_2], \ldots, \mathbf{E}[X_{200}]$. Jämför återigen med $n \log_2 n$.

5. Gör approximativt 95%-iga konfidensintervall för areorna i uppgift 3. Hur stort ska n vara för att felmarginalen ska vara högst 0.01?

6. (a) Låt $G = G(V, E)$ vara grafen där

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$$

$$E = \{ab, ac, ak, bc, bd, be, cd, de, df, dg, eh, ei, fi, fj, gj, gk, ik\}.$$

   (Obs. att beteckningarna för kanterna är på kortform. Exempelvis betyder ak egentligen $\{a, k\}$.) Låt $X_0, X_1, X_2, \ldots$ vara en slumpvandring på G. **Simulera** med datorns hjälp fram den approximativa fördelningen för X_{10} och X_{30}.

   Skriv också ett program som **beräknar** den exakta fördelningen för X_{10} och X_{30}.

   (b) Gör samma saker som i (a) för slumpvandring på den **riktade** grafen $G = G(V, E)$ där

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

$$E = \{ab, ac, ag, bc, bd, ca, cd, df, eb, ed, ee, fc, ff, fg, ge\}.$$

   (Obs. att här betyder exempelvis ag kanten **från** a **till** g, till skillnad från i (a) där riktningar saknas.)

   Tips: Beskriv de båda graferna med **grannmatriser**, se boken kapitel 6.6.

   I uppgift (a), vad är den stationära fördelningen?