20. Glömskeegenskapen hos den geometriska fördelningen: Visa att om X är en stokastisk variabel som är geometriskt fördelad gäller för alla n och k att

$$P(X > n + k|X > n) = P(X > k).$$

Övertyga dig själv om att detta egentligen är en självklarhet.

21. Låt n vara ett godtyckligt positivt heltal och låt X vara en stokastisk variabel som är binomialfördelad med parametrar n och $1/2$. Visa med hjälp av induktion att att $P(X$ är udda$) = 1/2$.

22. Låt X vara en stokastisk variabel som antar ickenegativa heltalsvärden. Visa att

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n).$$

23. I en urna finns åtta kulor som från början alla är vita. Antag att man gång på gång drar en kula ur urnan på måfå och sedan lägger tillbaka den efter att, om den är vit, ha målat den svart. Låt X vara antalet kulor man drar tills man för första gången valt en kula som redan blivit svartmålad. Beräkna väntevärdet för X.

24. Beräkna variansen för antalet kast man måste göra med en tärning innan alla sex sidor kommit upp. (Jämför med exemplet i texten där väntevärdet beräknas.)

25. Ett populärt tärningsspel på brittiska pubar är följande: Man satsar på ett tal mellan 1 och 6 och slår sedan tre tärningar. Om en av tärningarna visar det nummer man satsat på vinner man ett pund. Om två tärningar visar ens tal vinner man två pund och om alla tre visar detta tal vinnar man tre pund. Om ingen av tärningarna visar det man vill, förlorar man ett pund. Vad är väntevärdet av vinsten? Vad är variansen?

26. Ett heltal mellan 1 och 64 väljs på måfå. Du ska gissa vilket talet är genom att ställa ja/nej-frågor. Vad är väntevärdet av antalet gissningar som krävs (a) om du använder strategin "Är det 1? Är det 2? Är det 3? etc"? (b) om du använder strategin att halvera antalet möjligheter med varje fråga?

27. En person, låt oss kalla honom Olof, påstår sig besitta övernaturliga förmågor och hävdar att han med hög sannolikhet kan förutsäga utfallen av slantsinglingar. För att pröva honom tar du fram ett symmetriskt mynt och gör 20 stycken slantsinglingar och låter Olof i förväg förutsäga vad utfallet ska bli. Om Olof får rätt i 12 av de 20 fallen, skulle du vara beredd att tro på hans förmåga då? Om han har 15 rätt?

28. Om X och Y är två stokastiska variabler som har samma fördelning, vad är $\mathbf{E}[X/(X + Y)]$?

29. Finns det någon stationär fördelning för slumpvandring på grafen

$$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{b, d\}\})?$$

I så fall: Vad är den?

30. Konstruera själv fyra olika grafer och beräkna, om möjligt, den stationära fördelningen för slumpvandring på dem.

31. Låt A vara en händelse sådan att $P(A) > 0$. För alla händelser B, sätt $Q(B) = P(B|A)$. Visa att Q är ett sannolikhetsmått, dvs visa att alla tre påståendena i Sats 9.1 gäller för Q (och därmed alla påståenden om P i alla efterföljande satser).

32. Låt A och B vara två oberoende händelser. Visa att även A och B^c är oberoende (och därmed även A^c och B och likaså A^c och B^c).

10 Svar till övningar

10.1 Kapitel 1

3.
   - $p \vee q$: Solen skiner idag eller vitsipporna står i blom.
   - $p \wedge \sim r$: Solen skiner idag och det blåser inte sydlig vind.
   - $p \wedge (q \vee r)$: Solen skiner idag. Dessutom står vitsipporna i blom eller så blåser det sydlig vind.
   - $\sim q \vee (\sim p \wedge r)$: Vitsipporna blommar inte eller så skiner inte solen idag och det blåser sydlig vind.

4. p: Bilen startar, q: Du bråkar, r: Vi åker till Liseberg, s: Du måste städa ditt rum. Meningen i texten blir då: $p \wedge \sim q \rightarrow r \wedge \sim s$.

5. Man ska visa att de båda påståendena i ett givet par alltid har samma sanningsvärde. Låt oss ta det första paret som exempel: $\sim (p \wedge q)$ är falsk om och endast om $p \wedge q$ är sann, dvs då både p och q är sanna. $\sim p \vee \sim q$ är falsk om och endast om både $\sim p$ och $\sim q$ är falska, dvs om p och q är sanna. Vi ser att de båda påståendena i alla lägen har samma sanningsvärde, dvs är logiskt ekvivalenta.

7.
   - p: Jag ska vara snäll idag
   - q: Jag ska göra min läxa idag.
   - r: Mamma blir glad.
   - s: Jag får godis.
   - t: Pappa blir glad.

   Argumentet blir

$$\begin{array}{r} p \vee q \\ p \rightarrow r \\ r \rightarrow s \\ q \rightarrow t \\ \hline s \end{array}$$

8. (a) giltigt, (b) ogiltigt, (c) ogiltigt, (d) giltigt, (e) giltigt, (f) giltigt, (g) giltigt, (h) giltigt.

9. $\sum_{i \in M} i = 2 + 4 + 7 + 11 = 24$, $\prod_{i \in M} i^2 = 2^2 \cdot 4^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 = 379456$.

11. Sats 1.2(d): Vi ska visa att så fort $\exists x : P(x) \wedge Q(x)$ är sann så är också $(\exists x : P(x)) \wedge (\exists x : Q(x))$ sann. Men om det förstnämnda påstsåendet är sant betyder detta per definition att det finns ett element a i det aktuella definitionsområdet som är sådant att $P(a) \wedge Q(a)$ är sann, dvs att både $P(a)$ och $Q(a)$ är sanna. Detta medför dels att $\exists x : P(x)$ är sann, dels att $\exists x : Q(x)$ är sann, vilket i sin tur betyder att konjunktionen av dessa två är sann. Eftersom det var just detta som skulle visas är saken klar.
12. (a) falskt, (b) sant, (c) falskt, (d) sant, (e) sant.
13. (a) giltigt, (b) ogiltigt, (c) giltigt, (d) giltigt.

10.2 Kapitel 2

1. (a) 8, 9, 10, 11 (b) mängden är tom (c) alla heltal större än 8 (d) 5, 6, 7, 8
2. (a) sant (b) sant (c) falskt (d) sant (e) falskt (f) sant (g) falskt (h) falskt
4. $|A \times B| = mn$ och $|\mathcal{P}(A)| = 2^{mn}$.
5. Den första likheten är korrekt, medan den andra inte alltid gäller.

10.3 Kapitel 3

1. Eftersom $A \times A = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in A\}$ kan vi låta $f(x, y)$ vara avståndet mellan x och y.
2. Funktionen är surjektiv men inte injektiv. $f(-7) = (-7)^2 = 49$, $f(7) = 3 - 7 = -4$, $V_f = \mathbf{R}$, $f((-\infty, 4]) = [-1, \infty)$.
3. (a) varken injektiv eller surjektiv (b) varken injektiv eller surjektiv (c) bijektiv, inversen är $f^{-1}(x) = (x - 6)^{1/3}$ (d) varken surjektiv eller injektiv (e) surjektiv men inte injektiv.
4. $f \circ g(x) = f(g(x)) = g(x)^2 + 1 = 1/(1 + x^2)^2 + 1$, $g \circ f(x) = g(f(x)) = 1/(f(x)^2 + 1) = 1/((x^2 + 1)^2 + 1)$.

10.4 Kapitel 5

4. Felet är i startsteget: Att säga att alla hästar har samma färg i en mängd med bara en häst är ett meningslöst påstående; relationen "har samma färg" kräver ett par av hästar för att ha någon mening.

10.5 Kapitel 6

1. (a) 1, 3, 5 och 15 (b) 1 och 2 (c) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 och 24 (d) 1.
2. (a) $sgd(315, 74) = 7$, $u = -3$, $v = -17$. (b) $sgd(96, 144) = 48$, $u = -1$, $v = 1$. (c) $sgd(729, 611) = 1$, $u = -233$, $v = 278$.

5. (a) $366 = 2 \cdot 3 \cdot 61$, $\Phi(366) = 120$. (b) $10100 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 101$, $\Phi(10100) = 4000$. (c) $959 = 7 \cdot 137$, $\Phi(959) = 816$.

7. Eftersom p är primt och $p|a^2$ gäller enligt Sats 6.7 att $p|a$ varför $a = cp$ för något heltal c ur vilket det i sin tur följer att $a^2 = c^2p^2$ så att $p^2|a^2$.

8. Det finns två möjliga lösningar: Antingen köpte Olga 3 tårtbitar och 30 bakelser eller så köpte hon 11 tårtbitar och 7 bakelser.

9. Eftersom $sgd(6, 9) = 3$ och $3 \not| 1$ är ekvationen i (a) inte lösbar. Däremot är (b) lösbar då $3|15$. Den allmänna lösningen är $(x, y) = (1 - 3n, 1 + 2n), n \in \mathbf{Z}$. Ekvation (c) är lösbar och har den allmänna lösningen $(x, y) = (11 + 73n, 1 + 7n), n \in \mathbf{Z}$.

10. Lotta köpte 1 äpple, 5 meloner och 94 plommon.

13. (a) $x = [2]$, (b) $x = [4]$, (c) $x = [2]$, (d) $x = [3]$.

14. (a) ej lösbar, (b) $x = [4]$ eller $x = [9]$, (c) $x = [9]$, (d) ej lösbar.

17. 3.

18. Patrik har 163 leksaksbilar.

19. (a) $x = 236 + 273n$, $n \in \mathbf{Z}$. (b) $x = 2115 + 2652n$, $n \in \mathbf{Z}$. (c) $x = 16b - 15a + 240n$, $n \in \mathbf{Z}$. (d) $x = 167 + 495n$, $n \in \mathbf{Z}$.

20. 79.

10.6 Kapitel 7

1. $6^3 = 216$.

2. (a) $5! = 120$, (b) $3! = 6$, (c) $7! = 5040$.

3. (a) $3!/2! = 3$, (b) $7!/2! = 2520$, (c) $11!/(5! \cdot 2! \cdot 2!) = 83160$.

4. 91936.

5. $\binom{26}{8} = 1562275$.

6. $(x + 2)^7 = x^7 + 14x^6 + 84x^5 + 280x^4 + 560x^3 + 672x^2 + 448x + 128$.

7. $3^{10}\binom{17}{7} = 1148384952$.

8. $\binom{n+r-1}{r}$.

9. (a) $8! = 40320$, (b) $18 \cdot 6! = 12960$, (c) $38 \cdot 6! = 27360$, (d) $(4!)^2 = 576$, (e) $5(4!)^2 = 2880$.

10.7 Kapitel 8

1. Fall (d) är den enda icke sammanhängande grafen. Den har komponenterna $(\{a,c\},\{\{a,c\}\})$ och $\{b,d\},\{\{b,d\}\})$. Graferna i (a), (e) och (g) är träd. I övrigt gäller: (a) $d_a = d_c = 1$, $d_b = 2$. Det finns en Eulerväg mellan a och c men ingen Eulercykel. (b) $d_b = d_m = 3$, $d_k = d_d = 2$. En Eulerväg mellan b och m finns men ingen Eulercykel. (c) Alla gradtalen är 4. En Eulercykel finns. (d) Alla gradtalen är 1. Varken Eulerväg eller Eulercykel finns. (e) $d_a = 7$ medan all övriga gradtal är 1. Varken Eulerväg eller Eulercykel finns. (f) Alla gradtal är 4. En Eulercykel finns. (g) Samma graf som i (a). (h) Alla gradtal är 2 och en Eulercykel finns.

2. Tips: P.g.a. att $G = (V,E)$ är bipartit kan man skriva $V = A \cup B$ där A och B är disjunkta och där varje kant har ena änden i A och den andra i B. Därför måste varje väg vara i A exakt varannan gång.

4. I uppgift 1 är (c), (d), (f) och (k) reguljära. Den kublika grafen i uppgift 2 är inte reguljär.

6. Tips: För att visa att om det saknas väg av udda längd med start och mål i samma nod så måste G vara bipartit, låt $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$ vara en cykel som passerar varje kant minst en gång. Då måste n vara jämnt och man kan låta A vara mängen av alla v_k där k är udda och B motsvarande med k jämnt.

10.8 Kapitel 9

1. Utfallsrummet väljs lämpligen som mängden av alla kombinationer av tre kulor och sannolikhetsfunktionen till $p(u) = 1/35$ för alla kombinationer u.

3. $((\binom{2}{1}\binom{5}{2})/35 = 4/7$.

4. Tips: Använd Sats 9.2(f).

5. 10 procent.

6. $(48! \cdot 4 \cdot 38!)/(35! \cdot 52!) \approx 0.031$.

7. Om man antar att personerna väljer hotell oberoende av varandra och att de alla väljer hotell på måfå får man att den sökta sannoliheten är

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4} = \frac{5}{18}.$$

8. (a) $\frac{13\binom{4}{2}\binom{12}{3}4^3}{\binom{52}{5}}$, (b) $\frac{\binom{13}{2}\binom{4}{2}^2 44}{\binom{52}{5}}$, (c) $\frac{4^5 \cdot 10}{\binom{52}{5}}$, (d) $\frac{13\binom{4}{3}\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}}$, (e) $\frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}}$.

9. 1/2.

10. 11/50.

11. Om vi antar att alla pojkar som inte är brunögda har blå ögon får vi att det sökta antalet blåögda pojkar är 9.

13. Tips: $P(A) = \sum_{j=1}^{r} P(A \cap B_j)$.

14. 3/5.

15. Vid bäst av fem matcher är svaret 0.68256 medan det vid bäst av sju matcher blir 0.710208.

16. Förväntad vinst är $360/37 \approx 9.73$. Sannolikheten för 50 vinstfria spel är $(36/37)^{50} \approx 0.254$.

17. $4195/19683 \approx 0.213$.

18. (a) 105/512, (b) 193/512, (c) 7/128 (d) 9/64.

19. (a) $3/(2\pi^2)$, (b) $1 - 205/(24\pi^2) \approx 0.135$, (c) $49/(6\pi^2) \approx 0.827$, (d) ∞.

21. Tips: Skriv $X = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$ och använd induktion över n.

23. ca 4.245.

24. 38.99.

25. $-17/216$.

26. (a) 32.5, (b) 6.5.

27. Om Olof inte besitter någon spådomsförmåga blir antalet korrekta gissningar, X, $Bin(20, 1/2)$ och vi får att $P(X \geq 12) \approx 0.2517$ oxh att $P(X \geq 15) \approx 0.021$. Om Olof får 12 rätt finns det alltså ingen som helst anledning att låta sig övertygas; chansen är ju mycket god att lyckas minst så bra genom att bara gissa på måfå. Vid 15 rätt kommer saken i ett annat läge. Chansen att lyckas minst så bra bara genom att gissa är i stort sett inte mer än 1 på 50, så detta kan man se som ett statistiskt bevis av att något är på gång. (Dock skulle undertecknad aldrig tro att Olof verkligen kan se in i framtiden utan skulle dra slutsatsen att det förmodligen är något annat fel med undersökningen.)

28. 1/2.

29. Det finns en stationär fördelning: $\pi_a = 1/8$, $\pi_b = 3/8$, $\pi_c = \pi_d = 1/4$.

Referenser

1. J. A. Anderson, "Discrete Mathematics with Combinatorics," Prentice-Hall, New Jersey, 2001.

2. S. Ross, "A First Course in Probability," Macmillan, New York, 1984.

3. A. Vretblad, "Algebra och geometri," Gleerups, 1999.