Övningstenta Matematik IT, tma245

1. Bevisa eller hitta motexempel till förljande påståenden om mängder:

    (a) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$,

    (b) $(A \cup B) - (C \cup D) \subseteq (A - C) \cup (B - D)$,

    (c) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$.

2. Vilka av följande påståenden är tautologier:

    (a) $(p \to q) \vee (\sim q)$,

    (b) $(p \vee q \vee r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$,

    (c) $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$,

    (d) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$.

3. Vilka av följande argument är giltiga?

    (a)
$$\begin{array}{r} p \to q \\ \sim q \\ \hline \\ \therefore \sim p \end{array}$$

    (b)
$$\begin{array}{r} p \\ p \to q \\ q \to r \\ r \to s \\ \hline \\ \therefore\ s \end{array}$$

    (c)
$$\begin{array}{r} p \vee q \\ p \to r \\ q \to s \\ (r \vee s) \to (x \vee w) \\ \sim w \\ \hline \\ \therefore\ x \end{array}$$

$$
\text{(d)} \quad \begin{array}{r} p \\ p \to q \vee r \\ q \to s \\ r \to t \\ (s \wedge t) \to w \\ \hline \therefore \; w \end{array}
$$

4. Låt G vara grafen $G(V, E)$ där $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ och

$$E = \{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{c,d\},\{c,f\},\{d,e\},\{d,f\},\{e,f\}\}.$$

   (a) Rita G.

   (b) Ange de olika nodernas gradtal.

   (c) Är G sammanhängande?

   (d) Har enkel slumpvandring på G en stationär fördelning? Ange i så fall denna.

5. Ur en vanlig kortlek väljs fem kort på måfå. Vad är sannolikheten att man får:

   (a) en triss?,

   (b) ett fyrtal?,

   (c) en kåk?,

   (d) en straight flush?

6. Hur många "ord" med elva bokstäver kan man bilda av bokstäverna i ordet ABRAKADABRA?

7. I en urna finns tio bollar; en röd, tre gröna, två blå, två gula, en vit och en svart. Pelle och Lisa väljer på måfå tre bollar var. Pelle vinner 10 kronor för varje grön boll han drar. Lisa vinner 7 kronor för varje blå boll och 14 kronor för varje röd boll hon drar. (Ingen av dem vinner något för andra färger än de angivna.) Vem av dem spelar det i det långa loppet mest gynnsamma spelet?

8. Ett set i bordtennis vinns av den som först når 21 poäng, med bivillkoret att ett set måste vinnas med minst två poäng. Antag att när Pelle

och Lisa spelar vinns varje poäng med sannolikheten 0.55 av Lisa och med sannolikheten 0.45 av Pelle, oberoende av hur andra poäng fördelas. Om aktuell ställning är 18-17 i Pelles favör, vad är sannolikheten att Pelle vinner setet?

9. Fru Olsson var på torget och köpte bananer och meloner. Melonerna kostade 7 kronor/styck och bananerna kostade 3 kronor/styck och fru Olsson gjorde slut på precis 39 kronor. Hur många frukter av varje sort köpte hon?

10. Låt N vara ett positivt heltal och definiera följden $a_0, a_1, \ldots$ rekursivt genom att sätta $a_0 = N - 1$ och $a_{n+1} = \sqrt{N(N-1) + a_n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Visa att $a_n < N$ för alla n.

11. För vilka heltal n gäller att
$$20 | n^{27} + n^{15} + 2n^3?$$

12. Visa att om p är ett primtal är $\sqrt{p}$ irrationellt.

13. I en leksakslåda finns 20 olika byggklossar. Av dessa väljer man 9 stycken som man sedan placerar i högst tre olika staplar. På hur många sätt kan man förfara?

14. Bestäm det minsta positiva heltalet som löser ekvationssystemet
$$\begin{cases} x \equiv 2 \bmod 31 \\ x \equiv 3 \bmod 41 \\ x \equiv 7 \bmod 51 \end{cases}$$

15. Vad blir $15^{100} + 73^{200} + 19^{700}$ i $\mathbf{Z}_{101}$?