Matematik Chalmers

Tentamen i tma245 Matematik IT, del 1, den 19 januari 2002, kl. 9.00-13.00

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel

Telefonvakt: Christer Karlsson, tel. 0740-450922

1. (6p) Låt a, b och c vara heltal. Visa att $a|b$ och $a|c$ om och endast om $a|mb + nc$ för alla heltal m och n.

2. (6p) Formulera och bevisa binomialsatsen.

3. (6p) Formulera och bevisa kinesiska restsatsen.

4. (6p) Låt $A_1, A_2, A_3, \ldots$ vara delmängder av en universalmängd U. Visa först att $(A_1 \cup A_2)' = A_1' \cap A_2'$ och visa sedan med hjälp av induktion att det för alla $n = 2, 3, 4, \ldots$ gäller att $(\cup_{k=1}^{n} A_n)' = \cap_{k=1}^{n} A_n'$.

5. (7p) Rita grafen $G = G(V, E)$ där $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ och $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{a, f\}, \{f, g\}, \{a, h\}, \{h, i\}\}$.

   En av grafens nio noder väljs på måfå. Vad är väntevärdet av avståndet mellan den valda noden och a? (Avståndet mellan två noder i en graf ges av antalet kanter i en kortaste väg mellan de två noderna.)

6. (6p) Ungefär 1500 enkronor staplas på ett bord. När enkronorna läggs i staplar med 10 mynt i varje blir det 7 mynt över, när staplarna innehåller 7 mynt var blir det 3 mynt över och när staplarna består av 13 enkronor blir det 10 mynt över. Hur många enkronor finns det på bordet?

7. (6p) I vart och ett av följande logiska argument är en av hypoteserna dold av ett frågetecken. Ersätt frågetecknet med ett logiskt påstående sådant att argumentet blir giltigt och bevisa i samband med detta argumentets giltighet.

(a)
$$\begin{array}{r} ? \\ p \to q \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{r} ? \\ p \to q \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{r} p \vee q \\ p \to r \vee s \\ q \to t \\ ? \\ \hline \therefore\ s \end{array}$$

8. (7p) Finns det några heltal $n \geq 1$ sådana att kvoten

$$\frac{5^n - 1}{4^n - 1}$$

blir ett heltal? (Ditt svar måste naturligtvis motiveras för att ge poäng.)

/Johan Jonasson

Lösningar

1. Teoriuppgift.

2. Teoriuppgift.

3. Teoriuppgift.

4. Låt x vara ett godtyckligt element i $(A_1 \cup A_a)'$. Då gäller att $x \notin A_1 \cup A_2$, dvs $x \notin A_1$ och $x \notin A_2$, dvs $x \in A_1'$ och $x \in A_2'$, dvs $x \in A_1' \cap A_2'$. Därmed gäller att $(A_1 \cup A_2)' \subseteq A_1' \cap A_2'$.

   Å andra sidan om $x \in A_1' \cap A_2'$ gäller att $x \in A_1'$ och $x \in A_2'$ så att $x \notin A_1$ och $x \notin A_2$, dvs $x \notin A_1 \cup A_2$, dvs $x \in (A_1 \cup A_2)'$. Därmed gäller att $A_1' \cap A_2' \subseteq (A_1 \cup A_2)'$ och saken är klar.

   Låt oss nu ta den andra delen av uppgiften. Vi har nyss visat att påståendet som ska bevisas gäller då $n = 2$, så antag nu att påståendet också är sant då $n = p$ för ett godtyckligt valt positivt heltal p. Vi har då att

$$(\cup_{k=1}^{p+1} A_k)' = ((\cup_{k=1}^{p} A_k) \cup A_{p+1})'$$

   och enligt vad vi nyss visade i fallet $n = 2$ blir detta

$$(\cup_{k=1}^{p} A_k)' \cap A_{p+1}'$$

   som enligt induktionsantagandet är

$$(\cap_{k=1}^{p} A_p') \cap A_{p+1}' = \cap_{k=1}^{p+1} A_k'.$$

   Påståendet vi skulle visa följer nu av induktionsprincipen.

5. Grafen G är ett träd med a som "knutpunkt" och "armarna" ab, $acde$, afg och ahi.

   Låt nu den stokastiska variabeln X beteckna avståndet från a till en i G på måfå vald nod. Det gäller att $X = 0$ då a väljs, $X = 1$ då b, c, f eller h väljs, $X = 2$ då d, g eller i väljs och $X = 3$ då e väljs. Således blir $P(X = 0) = 1/9$, $P(X = 1) = 4/9$, $P(X = 2) = 3/9$ och $P(X = 3) = 1/9$ så att

$$\mathbf{E}[X] = \frac{1}{9}(0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1) = \frac{13}{9}.$$

6. Vi ska lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x \equiv 3 & \bmod 7 \\ x \equiv 7 & \bmod 10 \\ x \equiv 10 & \bmod 13 \end{cases}$$

   Enligt den första ekvationen är $x = 3 + 7k$ för något heltal k och om detta stoppas in i den andra ekvationen fås att $7k + 3 \equiv 7 \bmod 10$, dvs $7k \equiv 4 \bmod 10$. Inversen till 7 mod 10 är 3 så via multiplikation av denna kongruens med 3 får man $k \equiv 2 \bmod 10$, dvs $k = 10m + 2$ för något heltal m. Substituera nu för k i uttrycket för x och få $x = 7k + 3 = 7(10m + 2) + 3 = 70m + 17$.

   Stoppa nu in detta i den tredje ekvationen och få att $70m + 17 \equiv 10 \bmod 13$, dvs $70m \equiv 6 \bmod 13$, dvs $5m \equiv 6 \bmod 13$. Inversen till 5 mod 13 är 8 så multiplicera med 8 och få att $m \equiv 9 \bmod 13$, dvs $m = 13n + 9$ för något heltal n. Genom substitution av m fås nu att $x = 70(13n + 9) + 17 = 910n + 647$.

   För att nu komma i närheten av 1500 väljer vi $n = 1$ och får att antalet enkronor på bordet var 1557.

7. Vi försöker påvisa att argumentet är ogiltigt och hoppas kunna erhålla en motsägelse genom att ersätta frågetecknet med något lämpligt.

   (a) Antag att slutsatsen är falsk, dvs att $q = F$. För att hypoteserna ska vara sanna krävs då att $p = F$, så om vi ersätter frågetecknet med p erhålls en motsägelse och argumentet blir giltigt.

(b) Antag att slutsatsen är falsk, dvs att $p = S$. För att $p \to q$ ska vara sann krävs nu att $q = S$. Om vi ersätter frågetecknet med $\sim q$ blir då denna hypotes falsk och vi får den önskade motsägelsen och argumentet blir giltigt.

(c) Vi kan till exempel ersätta frågetecknet med $\sim r \wedge \sim q$, ty om slutsatsen skulle vara falsk, dvs $s = F$ krävs för att göra hypoteserna sanna att $p = F$ (ty $r \vee s = F$). Men då blir ju $p \vee q = F$, en motsägelse.

8. Man frågar om det finns några positiva heltal n sådana att $4^n - 1 | 5^n - 1$. Svaret är nej. För att inse detta gör vi olika analyser av fallen då n är udda respektive när n är jämnt.

   Om n är jämnt gäller $n = 2m$ för något positivt helta m så att $4^n - 1 = 4^{2m} - 1 = 16^m - 1 \equiv 1^m - 1 = 0 \mod 5$, dvs $5|4^n - 1$. Om nu $4^n - 1$ ska dela $5^n - 1$ krävs då att även $5^n - 1$ är delbart med 5, vilket uppenbarligen inte är sant då ju $5^n - 1 \equiv 4 \mod 5$ för alla n.

   I fallet då n är udda räknar vi istället mod 3: Eftersom n är udda kan vi skriva $n = 2m + 1$ för något ickenegativt heltal m. Vi har att $4^n - 1 \equiv 1^n - 1 = 0 \mod 3$ för alla n, dvs $3|4^n - 1$ för alla n medan $5^n - 1 = 5^{2m+1} - 1 = 5 \cdot 25^m - 1 \equiv 2 \cdot 1^m - 1 = 1 \mod 3$, dvs $5^n - 1$ är inte delbart med 3.