Lösningar till Övningstentan

4. Gradtalen är $d_a = d_b = d_e = 2$, $d_c = 4$, $d_d = d_f = 3$ och grafen är sammanhängande. Eftersom grafen innehåller trianglar kan den inte vara bipartit, så slumpvandring har en stationär sannolikhetsördelning som ges av att $\pi_a = \pi_b = \pi_e = 1/8$, $\pi_c = 1/4$ och $\pi_d = \pi_f = 3/16$.

5. Detta är ett slumpförsök som beskrivs av att utfallsrummet S är mängden av alla delmängder av storlek 5 till en kortlek och att sannolikhetsmåttet P ges av $P(A) = |A|/|S|$ för alla $A \subseteq S$.

   (a)
$$\begin{aligned} P(\text{en triss}) &= P(\{u \in S : u \text{ innehåller en triss}) \\ &= \frac{\text{antal sätt att välja en hand med triss}}{\text{antal sätt att välja en hand}} \\ &= \frac{13\binom{4}{3}\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{2 \cdot 47}{17 \cdot 5 \cdot 49} \approx 0.0226. \end{aligned}$$

   (b)
$$P(\text{ett fyrtal}) = \frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}} = \frac{3}{5 \cdot 51 \cdot 49} \approx 0.000240.$$

   (c)
$$P(\text{en kåk}) = \frac{13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{3}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{6}{5 \cdot 17 \cdot 49} \approx 0.00144.$$

   (d)
$$P(\text{en straight flush}) = \frac{4 \cdot 10}{\binom{52}{5}} = \frac{1}{26 \cdot 51 \cdot 49} \approx 0.0000154.$$

6. Låt n vara det sökta antalet ord och låt m vara antalet ord som kan bildas av bokstäverna i $A_1B_1R_1A_2KA_3DA_4B_2R_2A_5$, dvs antalet ord man får om man gör skillnad på olika A, B och R. Uppenbarligen gäller att $m = 11!$ men det gäller också att $m = n \cdot 5! \cdot 2! \cdot 2!$ eftersom varje ord där man inte skiljer på flera förekomster av samma bokstav svarar mot $5! \cdot 2! \cdot 2!$ ord där man skiljer på dem via permutering av A'na, B'na och R'en inbördes. Alltså är $n = 11!/(5! \cdot 2! \cdot 2!) = 83120$.

7. Låt X vara Pelles vinst vid en spelomgång och låt Y vara Lisas. Vi kan då skriva $X = X_1 + X_2 + X_3$ och $Y + Y_1 + Y_2 + Y_3$ där X_i är Pelles vinst från den i'te dragna bollen och Y_i'a är motsvarande för Lisa. Det är i uppgiften inte specificerat om bollarna dras med eller utan återläggning, men det spelar ingen roll för i vilket fall som helst gäller att $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2] + \mathbf{E}[X_3] = 3\mathbf{E}[X_1]$ med motsvarande för $\mathbf{E}[Y]$ så för att bestämma vem som spelar det mest gynnsamma spelet behöver man bara jämföra $\mathbf{E}[X_1]$ med $\mathbf{E}[Y_1]$. Vi har $\mathbf{E}[X_1] = 10P(X_1 = 10) + 0P(X_1 = 0) = 10 \cdot 0.3 = 3$ och $\mathbf{E}[Y_1] = 14P(Y_1 = 14) + 7P(Y_1 = 7) + 0P(Y_1 = 0) = 14 \cdot 0.1 + 7 \cdot 0.2 = 2.8$. Pelle vinner alltså i genomsnitt 3 kr per dragen boll och Lisa 2.8 kr per dragen boll, så det är Pelle som spelar det i det långa loppet mest gynnsamma spelet.

8. Betrakta de fem närmast följande bollarna och låt X vara antalet av dessa som Pelle vinner. (Vi kan anta att man alltid spelar minst fem bollar till även om t.ex. Pelle vinner de tre första så att de två återstående inte behövs. Vi kan ju tänka oss att man ändå spela två bollar till utom tävlan.) Då är X en $Bin(5, 0.45)$-fördelad stokastisk variabel och om $X \geq 3$ så vinner Pelle setet och om $X \leq 1$ går setet till och om $X = 2$ hamnar man i ett 20-20-läge.

   Låt nu A vara händelsen att Pelle vinner setet. Vi ska beräkna $P(A)$. Vi har

$$P(A) = P(X \geq 3) + P(A \cap \{X = 2\}) = P(X \geq 3) + P(A|X = 2)P(X = 2).$$

   Vidare har vi att

$$P(X \geq 3) = \binom{5}{3} 0.45^3 0.55^2 + \binom{5}{4} 0.45^4 0.55 + 0.45^5 \approx 0.40687$$

   och

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} 0.45^2 0.55^3 \approx 0.33691$$

   så det enda som återstår att beräkna är $P(A|X = 2)$. Kalla detta tal a. Givet att man hamnat i läget 20-20, betrakta de därpå följande två bollarna och låt Y vara antalet av dessa som Pelle vinner. Då gäller att $Y \sim Bin(2, 0.45)$ och att om $Y = 2$ vinner Pelle setet, om $Y = 0$ vinner Lisa och om $Y = 1$ får vi ställningen 21-21. Men chansen att

Pelle vinner från ett 21-21-läge är ju densamma som från ett 20-20-läge så vi får

$$a = P(Y = 2) + P(Y = 1)a$$

dvs $a = P(Y = 2)/(1-P(Y = 1)) = 0.45^2/(1-2\cdot 0.45\cdot 0.55) \approx 0.40099$. Genom att stoppa in detta i uttrycket för $P(A)$ och beräkna får vi att $P(A) \approx 0.542$.

9. Vi är intresserade av positiva lösningar till den diofantiska ekvationen

$$7x + 3y = 39$$

där x är antalet meloner och y är antalet bananer. Eftersom $sgd(7, 3) = 1$ är ekvationen lösbar och den allmänna lösningen ges av $(x, y) = (39u - 3n, 39v + 7n), n \in \mathbf{Z}$, där u och v ska väljas så att $7u + 3v = 1$. Man ser utan att behöva använda Euklides algoritm att det går bra med $u = -2$ och $v = 5$, så den allmänna lösningen blir $(x, y) = (-78 - 3n, 195 + 7n), n \in \mathbf{Z}$. Den enda lösningen där både x och y är positiva fås med $n = -17$ då $(x, y) = (3, 6)$. Svaret är alltså att fru Olsson köpte 3 meloner och 6 bananer.

10. Vi använder induktion på n. Att basfallet $n = 0$ är OK har vi direkt eftersom $a_0 = N-1 < N$, så antag att $a_n < N$ för $n = k$. Då gäller att $a_{k+1} = \sqrt{N(N-1) + a_k} < \sqrt{N(N-1) + N} = \sqrt{N^2} = N$. Påståendet i uppgiften följer nu av induktionsprincipen.

11. Eftersom $20 = 5 \cdot 4$ och 4 och 5 är relativt prima räcker det att kontrollera för vilka n som det gäller att $f(n) = n^{27} + n^{15} + 2n^3$ är delbart med både 4 och 5.

    Om man räknar modulo 5 får man att $f(0) \equiv 0$ och för $n = 1, 2, 3, 4$ får man att $f(n) \equiv n^3 + n^3 + 2n^3 = 4n^3 \not\equiv 0$ (ty $1^3 \equiv 1$, $2^3 \equiv 3$, $3^3 \equiv 2$ och $4^3 \equiv 4$).

    Räkning modulo 4 ger $f(0) \equiv f(1) \equiv f(2) \equiv f(3) \equiv 0$ dvs att $4|f(n)$ för alla n.

    Således är svaret att $20|f(n)$ för alla n för vilka $5|f(n)$. Men detta gällde ju då $n = 5k$, där k är ett godtyckligt heltal.

12. Antag att $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$ där $a, b \in \mathbf{Z}$ och där bråket är maximalt förkortat, dvs att $sgd(a, b) = 1$. Då gäller att $p = \frac{a^2}{b^2}$ så att $a^2 = pb^2$. Av detta

följer att $p|a^2$ och eftersom p är ett primtal gäller då att $p|a$, dvs att $a = cp$ för något $c \in \mathbf{Z}$. Eftersom vi hade att $a^2 = pb^2$ följer nu att $p^2c^2 = pb^2$ och därmed att $b^2 = pc^2$ så att $p|b^2$ och således att $p|b$. Men nu har vi kommit fram till att $p|a$ och $p|b$ vilket motsäger att $sgd(a, b) = 1$. Vi har därmed visat att $\sqrt{p}$ inte kan skrivas som en kvot mellan två heltal ellear m.a.o. att $\sqrt{p}$ är ett irrationellt tal.

13. Med hänsyn till ordning kan de 9 klossarna väljas ut på $20!/11!$ olika sätt. Detta svarar mot att sätta klossarna i en enda stapel. Antalet sätt att dela denna stapel i högst tre delar är detsamma som antalet sätt att välja ut positioner för två streck i en rad som ska bestå av 9 klossar och 2 streck, dvs $\binom{11}{2}$. Enligt multiplikationsprincipen blir det totala antalet val

$$\frac{20!}{11!}\binom{11}{2} = \frac{20!11!}{11!9!2!} = \frac{20!}{2 \cdot 9!}.$$

14. Det går alldeles utmärkt att lösa detta system av kongruenser med den metod som angivits på föreläsningarna, men den leder till att man får handskas med tal som är så stora att man knappast klarar sig utan miniräknare. Jag ska här demonstrera en annan metod som faktiskt blir överkomlig även för räkning endast med huvud, papper och penna. Att $x \equiv 2 \bmod 31$ betyder att $x = 31k + 2$ för något $k \in \mathbf{Z}$. Genom att stoppa in detta i den andra ekvationen får vi att $31k + 2 \equiv 3 \bmod 41$ som ger att $31k \equiv 1 \bmod 41$. Man ser ganska kvickt (m.hj.a. Euklides algoritm om man behöver) att $4 \cdot 31 - 3 \cdot 41 = 1$ så att inversen till 31 modulo 41 är 4. Därför följer att

$$k \equiv 4 \bmod 41$$

dvs att $k = 41l + 4$ för något $l \in \mathbf{Z}$. Vi får då för x att $x = 31k + 2 = 31(41l+4)+2 = 1271l+126$. Stoppa nu in detta i den tredje ekvationen och få att $1271l+126 \equiv 7 \bmod 51$. Eftersom $126 \equiv -17$ och $1271 \equiv -4 \bmod 51$ leder detta till

$$4l \equiv 17 \bmod 51.$$

Det är lätta att se att inversen till 4 modulo 51 är 13 så vi får att $l \equiv 13 \cdot 17 = 221 \equiv 17 \bmod 51$, dvs $l = 51m + 17$ för något $m \in \mathbf{Z}$.

Detta betyder nu för x att $x = 1271l + 126 = 1271(51m + 17) + 126 = 64821m + 21733$ och vi är klara. Svaret är alltså

$$x = 64821m + 21733, m \in \mathbf{Z}.$$

15. Eftersom 101 är ett primtal gäller att $\phi(101) = 100$ så att $a^{100} = 1$ i $\mathbf{Z}_{101}$ enligt Eulers sats för alla heltal a mellan 1 och 100. Således gäller att

$$15^{100} + 73^{200} + 19^{700} = 15^{100} + (73^{100})^2 + (19^100)^7 = 3.$$