Kapitel 11

Svar till övningar

11.1 Kapitel 1

3. – $p \vee q$: Solen skiner idag eller vitsipporna står i blom.
   – $p \wedge \neg r$: Solen skiner idag och det blåser inte sydlig vind.
   – $p \wedge (q \vee r)$: Solen skiner idag. Dessutom står vitsipporna i blom eller så blåser det sydlig vind.
   – $\neg q \vee (\neg p \wedge r)$: Vitsipporna blommar inte eller så skiner inte solen idag och det blåser sydlig vind.

4. (a) P : Bilen startar. Q : Du bråkar.
   R : Vi åker till Liseberg. S : Du måste städa ditt rum.
   Meningen i texten blir då: $(P \wedge \neg Q) \rightarrow (R \wedge \neg S)$.
   (b) P : Det regnar. Q : Det haglar.
   R : Jag stannar inne. S : Jag tar med mig paraplyt.
   Meningen i texten blir då: $(P \vee Q) \rightarrow (R \vee S)$

5. Man ska visa att de båda utsagorna i ett givet par alltid har samma sanningsvärde. Låt oss visa den första av deMorgans lagar som exempel: $\neg(p \wedge q)$ är falsk om och endast om $p \wedge q$ är sann, d v s då både p och q är sanna. $\neg p \vee \neg q$ är falsk om och endast om både $\neg p$ och $\neg q$ är falska, d v s om p och q är sanna. Vi ser att de båda utsagorna i alla lägen har samma sanningsvärde, d v s är logiskt ekvivalenta.

7. – p: Jag ska vara snäll idag
   – q: Jag ska göra min läxa idag.
   – r: Mamma blir glad.
   – s: Jag får godis.
   – t: Pappa blir glad.

   Argumentet blir

$$\begin{array}{r} p \vee q \\ p \to r \\ r \to s \\ q \to t \\ \hline s \end{array}$$

Det är inte giltigt, ty om man sätter $p = r = s = F$ och $q = t = S$ så är hypoteserna uppfyllda men slutsatsen falsk.

8. (a) giltigt, (b) ogiltigt, (c) ogiltigt, (d) giltigt, (e) giltigt, (f) giltigt, (g) giltigt, (h) giltigt.

9. Antag att slutsatsen är falsk, d v s att C är falsk och H_i sann för $i = 1, \ldots, n$. Den första hypotesen ger då att B är sann. Från den andra får man då att C är sann, eftersom det framför implikationspilen är sant. Detta är en motsägelse, eftersom vi hade att C var falsk. Alltså har vi med hjälp av ett motsägelsebevis visat att argumentet är korrekt.

10. (a) $P(x):\ x \neq 0,\quad Q(x):\ x > 0,\quad R(x):\ x < 0,\qquad P(x) \to (Q(x) \vee R(x))$
    Meningen i texten blir då: $P(x) \to (Q(x) \vee R(x))$
    (b) $P(x)$: x kommer med i det svenska skidVM-laget.
    $Q(x)$: x är bland de 4 främsta i uttagningarna.
    $R(x)$: x är regerande världsmästare.
    Meningen i texten blir då: $P(x) \to (Q(x) \vee R(x))$.

12. Implikationen: Vi ska visa att så fort $\exists x : [P(x) \wedge Q(x)]$ är sann så är också $[\exists x : P(x)] \wedge [\exists x : Q(x)]$ sann. Men om det förstnämnda påståendet är sant betyder detta per definition att det finns ett element a i universumet som är sådant att $P(a) \wedge Q(a)$ är sann, d v s att både $P(a)$ och $Q(a)$ är sanna. Detta medför dels att $\exists x : P(x)$ är sann, dels att $\exists x : Q(x)$ är sann, vilket i sin tur betyder att konjunktionen av dessa två är sann. Eftersom det var just detta som skulle visas är saken klar.

    Den är däremot inte en ekvivalens. Sätt t ex $P(x) : x > 0$ och $Q(x) : x < 0$ och universum heltalen. Då är uppenbarligen $[\exists x : P(x)] \wedge [\exists x : Q(x)]$ sann, men $\exists x : [P(x) \wedge Q(x)]$ är falsk då inget tal är både positivt och negativt.

13. (a) falskt, (b) sant, (c) falskt, (d) sant, (e) sant.

14. (a) giltigt, (b) ogiltigt, (c) giltigt, (d) giltigt.

    Det sista är av samma form som exemplet med matematiker, knäppskallar och folk som bor i Göteborg.

15. (b) Vi har redan visat att varje sanningstabell kan fås med hjälp av $\neg$ och $\vee$. I (a) visade vi att man kan ersätta båda dessa två med enbart NAND-operatorn och alltså kan varje sanningstabell fås med hjälp av enbart denna.
    (c) Visa att $\neg p \Leftrightarrow p \& p$ och $p \vee q \Leftrightarrow (p \& q) \& (p \& q)$.

16. (a) $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$
    (b) $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$
    (c) $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee$
    $\vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$
    (d) $(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee$
    $\vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

11.2 Kapitel 2

1. (a) 8, 9, 10, 11 (b) mängden är tom (c) alla heltal större än 8 (d) 5, 6, 7, 8

2. (a) sant (b) sant (c) falskt (d) sant (e) falskt (f) sant (g) falskt (h) falskt

3. Vi tar det femtonde påståendet som exempel: $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, där den andra ekvivalensen följer av känt faktum om operatorer med logiska påståenden.

4. $|A \times B| = mn$ och $|\mathcal{P}(A)| = 2^{mn}$.

5. Den första likheten är korrekt, medan den andra inte alltid gäller. Ett motexempel mot den andra likheten får man om man sätter $A = B = C = \{1\}$. För att visa den första: $x \in A \cap (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \setminus C \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin A \cap C \Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge x \notin A \cap C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

6. $A \cap B = A$, $A \setminus B = \emptyset$ och $A \cup B = B$.

7. $A = \{a, c, k, s, t, v, x\}$, $B = \{b, f, s, t, v, x\}$.

8. 23 element.

9. Om $A \neq B$ finns det ett element $x \in A$ som inte finns i B, eller tvärtom. I det första fallet gäller att $\{x\}$ finns i $\mathcal{P}(A)$ men inte i $\mathcal{P}(B)$ och i det andra fallet gäller det omvända förhållandet.

10. $|A \cup B| = a + b - c$.

11.3 Kapitel 3

1. Eftersom $A \times A = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in A\}$ kan vi låta $f(x, y)$ vara avståndet mellan x och y.

2. Funktionen är surjektiv men inte injektiv. $f(-7) = (-7)^2 = 49$, $f(7) = 3 - 7 = -4$, $V_f = \mathbb{R}$, $f((-\infty, 4]) = [-1, \infty)$.

3. (a) varken injektiv eller surjektiv (b) varken injektiv eller surjektiv (c) bijektiv, inversen är $f^{-1}(x) = (x - 6)^{1/3}$ (d) varken surjektiv eller injektiv (e) surjektiv men inte injektiv.

4. $f \circ g(x) = f(g(x)) = g(x)^2 + 1 = 1/(1 + x^2)^2 + 1$, $g \circ f(x) = g(f(x)) = 1/(f(x)^2 + 1) = 1/((x^2 + 1)^2 + 1)$.

5. Först observerar vi att om $C_1 \subseteq C_2 \subseteq A$ gäller att $f(C_1) \subseteq f(C_2)$; detta följer omedelbart av definitionen av dessa mängder. Därför gäller att $f(X \cap Y) \subseteq f(X)$ och att $f(X \cap Y) \subseteq f(Y)$ vilket i sin tur medför att $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$. Ett motexempel (bland oändligt många andra) mot den omvända inklusionen ges av $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $A = (-1, 0)$ och $B = (0, 1)$.

   För att visa att $f(X) \cup f(Y) \subseteq f(X \cup Y)$ används samma teknik som nyss. För att visa att $f(X \cup Y) \subseteq f(X) \cup f(Y)$ observerar vi att för alla $y \in f(X \cup Y)$ gäller att $y = f(a)$

för något element $a \in X \cup Y$. Att $a \in X \cup Y$ betyder att $a \in X$ eller att $a \in Y$. I det första fallet gäller att $y = f(a) \in f(X)$ och det andra att $y = f(a) \in f(Y)$ så att det i bägge fallen gäller att $y \in f(X) \cup f(Y)$.

6. Vi tar den första deluppgiften. Eftersom f är surjektiv gäller att $f^{-1}(Y)$ inte är tom såvida inte Y själv är tom (och då är likheten $f(f^{-1}(Y)) = Y$ trivialt sann). Om nu $y \in Y$ finns det alltså ett $x \in X$ sådant att $y = f(x)$ så per definition gäller att $x \in f^{-1}(\{y\}) \subseteq f^{-1}(Y)$. Därför gäller att $f(x) \in f(f^{-1}(Y))$, d v s $y \in f(f^{-1}(Y))$.

   Å andra sidan om $y \in f(f^{-1}(Y))$ så gäller att $y = f(x)$ för något $x \in f^{-1}(Y)$. Att $x \in f^{-1}(Y)$ betyder per definition att $f(x) \in Y$, d v s $y \in Y$.

7. Funktionerna f_1, f_2 och f_3 är lika.

8. De två funktionerna är lika så $x \leq -1$ eller $x \geq 1$. I övriga fall gäller att $|f(x) - g(x)| = 2(1 - x^2)$ som blir som störst 2, vilket sker då $x = 0$.

9. Att $A \subseteq \mathbb{Z}_+$ är ju glasklart från definitionen så man behöver bara visa att det finns ett positivt heltal b som inte ligger i A. Ett sådant är till exempel 3 eftersom det inte gäller att $3 = a^2$ för något heltal a. En bijektiv funktion är $f(a) = a^2$ var invers är $f^{-1}(a) = \sqrt{a}$.

10. (a) Eftersom $|f(A)| \leq a < b$ kan inte f vara surjektiv. På samma sätt kan inte g vara injektiv ty om så vore fallet skulle det gälla att $|g(B)| = |B| = b$ vilket motsäger att $g(B) \subseteq A$. I övrigt kan vi inte säga något definitivt utan känna till f och g specifikt.

    (b) f är injektiv om och endast om $f(x) \neq f(y)$ för alla $x \neq y$, i detta fall om och endast om $|f(A)| = |A| = |B|$ vilket sker om och endast om $f(A) = B$ d v s om f är surjektiv.

11. Olika punkter på grafen har olika y-koordinater.

12. $f^n(x) = x + an$

13. Den sökta mängden är $\{x + c : c \text{ konstant}\}$.

14. Om T har kateterlängderna a och b gäller att $f(T) = ab/2$. Funktionen är inte injektiv eftersom exempelvis en triangel med kateterlängderna 1 och 4 har samma area som en där bägge kateterna har längd 2. Den är inte heller surjektiv eftersom alla tänkbara areor av trianglar i M är av typen $c/2$ där c är ett heltal. Bilden är just $f(M) = \{c/2 : c \in \mathbb{Z}_+\}$.

15. Både kommutativ och associativ. Talet 1 är identitet. Alla element $x \neq 1/2$ har inversen $x^{-1} = x/(2x - 1)$. För $1/2$ saknas invers.

16. Associativ men inte kommutativ. Identitet saknas och därmed även inverser. Om mängden bara innehållit ett enda element skulle operatorn trivialt varit kommutativ och haft identitet och invers.

17. Associativ och kommutativ. Tomma mängden är identitet. Denna har sig själv som invers, i övrigt saknas inverser.

18. Associativ men inte kommutativ. Likhetsrelation är identitet. De relationer som har invers är de som svarar mot grafer till inverterbara funktioner och inversen är den relation som svarar mot grafen till den inversa funktionen.

19. $\sum_{i \in M} i = 2 + 4 + 7 + 11 = 24$, $\prod_{i \in M} i^2 = 2^2 \cdot 4^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 = 379456$.

20. En relation är ju en delmängd till $A \times A$, d v s ett element i $\mathcal{P}(A \times A)$. Eftersom det finns n^2 element i $A \times A$ finns det alltså totalt 2^{n^2} olika relationer.

21. Om R är transitiv och $(x, y) \in R \circ R$ gäller att det finns ett element z sådant att xRz och zRy vilket tack vare transitiviteten medför att xRy, d v s $(x, y) \in R$. Alltså gäller att $R \circ R \subseteq R$. Å andra sidan om $R \circ R \subseteq R$, xRy och yRz gäller per definition av $R \circ R$ att $(x, z) \in R \circ R$ vilket då medför att $(x, z) \in R$, d v s xRz. Alltså är R transitiv.

22. R är trivialt reflexiv då ju $a^2 + b^2 = a^2 + b^2$. Symmetrin är också uppenbar. Transitiviteten är också rättfram: $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ och $c^2 + d^2 = e^2 + f^2$ medför trivialt att $a^2 + b^2 = e^2 + f^2$. Ekvivalensklasserna utgörs av alla cirklar centrerade kring origo. En mängd med exakt ett element ur varje ekvivalensklass är $\{(x, 0) : x \geq 0\}$.

23. Reflexiviteten är trivial, liksom symmetrin. Transitivitet: om $(a, b)R(c, d)$ och $(c, d)R(e, f)$ gäller att $\max(|a|, |b|) = \max(|c|, |d|)$ och $\max(|c|, |d|) = \max(|e|, |f|)$ ur vilket det följer att $\max(|a|, |b|) = \max(|e|, |f|)$, d v s $(a, b)R(e, f)$. Ekvivalensklasserna är mängden av kvadrater centrerade kring origo. En representant för kvadraten med sidan $2x$ är till exempel $(x, 0)$.

24. Transitivitet: $(a, b)R(c, d) \wedge (c, d)R(e, f) \Rightarrow a + d = b + c \wedge c + f = d + e \Rightarrow a + d + c + f = b + c + d + e \Rightarrow a + f = b + e \Rightarrow (a, b)R(e, f)$. Man kan identifiera detta med att $(a, b)R(c, d)$ om $a - b = c - d$. Man kan dock inte definiera relationen på detta sätt då ju det inte alltid gäller att $a - b \in \mathbb{Z}_+$ eller $c - d \in \mathbb{Z}_+$. (Man kan tvärtom på detta sätt *definiera* $\mathbb{Z}$ utifrån $\mathbb{Z}_+$. Se kapitel 4.)

25. Tag $\mathbb{Z}_+$ och lägg till ett element, a, som inte är relaterat till något annat element. Man får då den partiellt ordnade mängden $(\mathbb{Z}_+ \cup \{a\}, \preceq)$ där $x \preceq y$ om och endast om $x \neq a$, $y \neq a$ och $x \leq y$. Elementet a blir minimalt, ty $x \preceq a$ gäller inte för något x, och är ensamt om denna egenskap, ty för alla andra element x gäller ju till exempel att $x - 1 \preceq x$.

26. Reflexivitet: $a|a$ ty $a = 1a$. Symmetri: Om $a|b$ och $b|a$ gäller för två heltam m och n att $b = ma = m(nb) = mnb$ varför $mn = 1$. Eftersom a och b är positiva gäller det då att $m = n = 1$ och därför att $b = a$. Transitivitet: Om $a|b$ och $b|c$ gäller att $c = nb = n(ma) = nma$ d v s $a|c$. Se bevisen av Satserna 7.1.1-7.1.3.

27. Tag till exempel $R_2 = R_1$. Då blir $R_2 \circ R_1 = R_1^2 = \{(1, 3)\}$.

11.4 Kapitel 5

1. $a_{22} = 0$ och $a_{13} = 5$. a_{31} finns inte.

2.
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Man ska visa att element (i,j) och element (j,i) är lika för godtyckligt valda i och j. Element (i,j) i A^TA är lika med
$$\sum_k a_{ki}a_{kj} = \sum_k a_{kj}a_{ki}$$
vilket sammanfaller med element (j,i) i A^TA. Element (i,j) i AA^T är
$$\sum_k a_{ik}a_{jk} = \sum_k a_{jk}a_{ik}$$
vilket är element (j,i).

4. Man får att
$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}.$$
I fallen $n = 1, 2, 3$ blir detta just längden av sträckan från origo till punkten $\mathbf{a}$, d v s längden av vektorn $\mathbf{a}$. Det är rimligt att låta detta begrepp gälla även i högre dimensioner.

5.
$$f(x,y,z) = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$
där
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$
och
$$g(x,y) = B \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
där
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$
Vi får då
$$(g \circ f)(x,y,z) = B(A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = (BA) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 4 & -5 & 7 \\ -7 & 12 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

och

$$(f \circ g)(x,y) = A(B \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = (AB) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 17 \\ 1 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

d v s

$$(g \circ f)(x,y,z) = (-x + 2y + 2z, 4x - 5y + 7z, -7x + 12y + 4z)$$

och

$$(f \circ g)(x,y) = (8x + 17y, x - 10y).$$

6. Relationsmatriserna är

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi får alltså att

$$M_1 M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

och

$$M_2 M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ur vilket vi avläser att

$$R_1 \circ R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,2)\}$$

och

$$R_2 \circ R_1 = \{(2,3), (2,3), (3,3)\}.$$

7. Matrisformen är

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

där

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. Likhetsrelationen.

9. Relationsmatrisen är den matris som har ettor på och uppe till höger om huvuddiagonalen och nollor i övrigt.

10. Symmetri hos relationen betyder att relationsmatrisen blir symmetrisk. Reflexivitet betyder att huvuddiagonalen innehåller idel ettor. För en ekvivalensrelation kommer, med elementen satta i rätt ordning, matrisen att bestå av kvadratiska block med idel ettor och i övrigt idel nollor.

11.5 Kapitel 6

1. När $n = 1$ är den sökta likheten sann, ty $1^3 = 1 = (1(1+1)/2)^2$. Antag nu att likheten gäller för ett fixt men godtyckligt valt n. Om vi utifrån detta antagande kan visa att

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2,$$

så följer det önskade resultatet av induktionsprincipen.

Nu är ju

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3$$

som enligt induktionsantagandet är $(n(n+1)/2)^2 + (n+1)^3$. Vi vill visa att detta är lika med $((n+1)(n+2)/2)^2$, eller m a o att $((n+1)(n+2)/2)^2 - (n(n+1)/2)^2 = (n+1)^3$. Vi kollar

$$\begin{aligned} \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 &= \frac{(n+1)^2((n+2)^2 - n^2)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(4n+4)}{4} = (n+1)^3. \end{aligned}$$

2. Idén är precis densamma som i uppgiften ovan och $(n+1)/(n+2) - n/(n+1) = ((n+1)^2 - n(n+2))/((n+1)(n+2)) = 1/((n+1)(n+2))$.

3. Sätt $f(n) = 2^n - 1$. Vi ska visa att $f(n) = L(2n)$ för alla naturliga tal n. Vi gör ett induktionsbevis.
Basfall: $n = 0$. Vi får $L(2 \cdot 0) = 0$ och $f(0) = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ så alltså är påståendet sant för $n = 0$.
Induktionssteg: Antag att påståendet är sant för n. Vi ska visa att då är det också sant för $n + 1$. Men vi har

$$\begin{aligned} L(2(n+1)) &= L(2n+2) = 2L(2n) + 1 \\ &= 2f(n) + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1 = f(n+1), \end{aligned}$$

där den andra likheten följer av definitionen av $L(n)$ och den tredje av induktionsantagandet.
Nu följer det av induktionsaxiomet att $f(n) = L(2n)$ för alla naturliga tal n.

4. Fixera ett godtyckligt x. För $n = 1$ säger olikheten som vi ska visa att $1 + x \geq 1 + x$ vilket uppenbart är sant. Välj nu ett godtyckligt n och gör induktionsantaganadet att $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Vi vill då visa att $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$. Men
$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x\end{aligned}$$
där den första olikheten följer av induktionsantagandet och att $x \geq 0$ och den andra olikheten av att $x^2 \geq 0$ för alla reella tal x.

5. Felet ligger i att induktionssteget inte fungerar då $n = 1$. Då går det inte att hitta två olika hästar, x och y.

6. Vi gör ett induktionsbevis.

   Basfall: De två fallen $n = 0$ och $n = 1$ är uppenbarligen sanna per definition av $h(n)$.

   Induktionssteg: Antag att påståendet är sant för något n med $n \geq 1$. Vi ska visa att då är det också sant för $n + 1$. Vi vet alltså att $1 \leq h(n) < 2$. Eftersom $n + 1 > 1$ så får vi
$$h(n+1) = \frac{h(n)}{2} + \frac{1}{h(n)}.$$
   Genom att utnyttja vårt induktionsantagande så får vi
$$\frac{1}{2} \leq \frac{h(n)}{2} < 1 \text{ och } \frac{1}{2} < \frac{1}{h(n)} \leq 1.$$
   Detta ger
$$h(n+1) = \frac{h(n)}{2} + \frac{1}{h(n)} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$
   och
$$h(n+1) = \frac{h(n)}{2} + \frac{1}{h(n)} < 1 + 1 = 2.$$
   Alltså är $1 \leq h(n+1) < 2$ och därmed följer det av induktionsaxiomet att påståendet är sant för alla naturliga tal n.

7. Sätt $f(n) = |\bigcup_{i=1}^{n} A_i|$. Då ska vi bevisa att $f(n) = n^2$ för alla positiva heltal n. Vi gör ett induktionsbevis.

   Basfall: $n = 1$. Då har vi
$$f(1) = \left|\bigcup_{i=1}^{1} A_i\right| = |A_1| = 3 \cdot 1 - 2 = 1 = 1^2,$$
   så påståendet är sant för $n = 1$.

   Induktionssteg: Antag att det är sant för n och visa att då är det också sant för $n + 1$. Genom att utnyttja $|C \cup B| = |C| + |B| - |C \cap B|$ i första steget och sedan induktionsantagandet och förutsättningarna på A_i så får vi
$$\begin{aligned}f(n+1) &= \left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = |A_{n+1}| + \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| - \left|A_{n+1} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right| \\ &= 3(n+1) - 2 + n^2 - (n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.\end{aligned}$$
   Enligt induktionsaxiomet är påståendet därmed sant för alla positiva heltal n.

8. 1. Vi gör ett induktionsbevis.
   Basfall: $n = 1$
   Vi har att
   $$A(1,1) = 2 = 2^1,$$
   och alltså gäller likheten för $n = 1$.
   Induktionssteget: Antag nu att det gäller för ett fixt positivt heltal n. Visa att då gäller det också för $n+1$. Vi får
   $$A(1,n+1) = A(0,A(1,n)) = A(0,2^n) = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1},$$
   eftersom $n+1 \geq 2$ och alltså gäller likheten också för $n+1$.
   Enligt induktionsaxiomet gäller därmed likheten för alla positiva heltal.
   2. Vi gör återigen ett induktionsbevis.
   Basfall: $m = 1$
   Vi har att
   $$A(1,2) = A(0,A(1,1)) = A(0,2) = 4,$$
   och alltså gäller likheten för $m = 1$.
   Induktionssteget: Antag nu att det gäller för ett fixt positivt heltal m. Visa att då gäller det också för $m+1$. Vi får
   $$A(m+1,2) = A(m,A(m+1,1)) = A(m,2) = 4,$$
   ty $m \geq 1$ och alltså gäller likheten också för $m+1$.
   Enligt induktionsaxiomet gäller därmed likheten för alla positiva heltal.

9. Sätt $f(1) = a_1$ och $f(n) = a_n f(n-1)$.

10. Om n är delbart med 5 så gäller att $n = 5k$ för något heltal k vilket medför att $n^2 = (5k)^2 = 25k^2 = 5(5k^2)$, d v s n^2 är också delbart med 5. Å andra sidan, om n inte är delbart med 5 så gäller att $n = 5k + b$ för ett heltal k, där b är 1, 2, 3 eller 4. Då är $n^2 = 25k^2 + 10kb + b^2 = 5(5k^2 + 2kb) + b^2$ så eftersom b^2 inte är delbart med 5 för något av de fyra möjliga värdena för b är inte heller n^2 delbart med 5.

11. Antag att det finns ett reellt tal x sådant att $x^2 - 6x + 10 = 0$. Eftersom x är reellt gäller att $x - 3$ är reellt, men genom kvadratkomplettering ser vi att $x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1 = 0$, d v s $(x-3)^2 = -1$, d v s $x - 3 = \pm i$, en motsägelse.

11.6 Kapitel 7

1. (a) 1, 3, 5 och 15 (b) 1 och 2 (c) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 och 24 (d) 1.

2. (a) $sgd(315,56) = 7$, $u = -3$, $v = -17$. (b) $sgd(96,144) = 48$, $u = -1$, $v = 1$. (c) $sgd(729,611) = 1$, $u = -233$, $v = 278$.

3. Om $\sqrt{p}$ vore ett rationellt tal skulle man kunna skriva $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$ där a och b är två relativt prima heltal. Detta betyder att $p = \frac{a^2}{b^2}$ så att $a^2 = pb^2$ vilket medför att $p|a^2$ vilket i sin tur tack vare att p är ett primtal medför att $p|a$ så att $a = pc$ för något heltal c. Vi får då att $p = \frac{p^2c^2}{b^2}$, d v s $b^2 = pc^2$ så genom att upprepa samma argumentation med b och c som vi nyss gjorde med a och b finner vi att $b = pd$ för något heltal d. Men då har vi ju kommit fram till att p delar både a och b vilket motsäger att a och b är relativt prima.

4. Antag att $x = p/q$ är en rationell lösning till andragradsekvationen i fråga, d v s p och q är två relativt prima heltal och

$$a(p/q)^2 + b(p/q) + c = 0.$$

Förläng med q^2 och få

$$ap^2 + bpq + cq^2 = 0.$$

Detta uttryck är ekvivalent med att $p(ap + bq) = -cq^2$ vilket medför att $p|cq^2$. Eftersom p och q är relativt prima följer det av detta att $p|c$. Att $q|a$ följer av att istället flytta över ap^2 på högersidan av likhetstecknet och bryta ut q från det som blir kvar på vänstersidan. För att klara uppgiftens andra del, observera att $\sqrt{n}$ är en lösning till andragradsekvationen $x^2 - n = 0$, d v s specialfallet $a = 1$, $b = 0$ och $c = n$.

5. (a) $366 = 2 \cdot 3 \cdot 61$, $\Phi(366) = 120$. (b) $10100 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 101$, $\Phi(10100) = 4000$. (c) $959 = 7 \cdot 137$, $\Phi(959) = 816$.

6. Att p är ett primtal som inte är 2 eller 3 betyder Att $p = 6k + 1$ eller $6k - 1$ för något heltal k. Detta följer av att eftersom p är udda gäller antingen något av de nämnda alternativen eller att $p = 6k + 3$ för något k. Men om $p = 6k + 3$ ser vi direkt att $3|p$, d v s p är inte ett primtal. Nu följer att $p^2 - 1 = (6k \pm 1)^2 - 1 = (36k^2 \pm 12k + 1) - 1 = 24k^2 + 12k^2 \pm 12k = 24k^2 + 12k(k \pm 1)$. Den första termen delas uppenbarligen av 24 och detta gäller även den andra termen då ju $k(k + 1)$ såväl som $k(k - 1)$ är jämna tal.

7. Eftersom p är prima och $p|a^2$ gäller enligt Sats 7.2.2 att $p|a$ varför $a = cp$ för något heltal c ur vilket det i sin tur följer att $a^2 = c^2p^2$ så att $p^2|a^2$.

8. Det finns två möjliga lösningar: Antingen köpte Olga 3 tårtbitar och 30 bakelser eller så köpte hon 11 tårtbitar och 7 bakelser.

9. Eftersom $sgd(6, 9) = 3$ och $3 \not| 1$ är ekvationen i (a) inte lösbar. Däremot är (b) lösbar då $3|15$. Den allmänna lösningen är $(x, y) = (1 - 3n, 1 + 2n), n \in \mathbb{Z}$. Ekvation (c) är lösbar och har den allmänna lösningen $(x, y) = (11 + 73n, 1 + 7n), n \in \mathbb{Z}$.

10. Lotta köpte 1 äpple, 5 meloner och 94 plommon.

11. Man ska visa att det för alla (positiva) heltal a gäller att $a^2 \neq 8k + 3$ för alla heltal k, d v s att $a^2 \not\equiv 3 \mod 8$ eller m.a.o. att $[a]^2 \neq [3]$ i $\mathbb{Z}_8$ för alla $a = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Men $[0]^2 = [0]$, $[1]^2 = [1]$, $[2]^2 = [4]$, $[3]^2 = [1]$, $[4]^2 = [0]$, $[5]^2 = [1]$, $[6]^2 = [4]$ och $[7]^2 = [1]$. Saken är klar.

13. (a) $x = [2]$, (b) $x = [4]$, (c) $x = [2]$, (d) $x = [3]$.

14. (a) ej lösbar, (b) $x = [4]$ eller $x = [9]$, (c) $x = [9]$, (d) ej lösbar. För att illustrera hur man på ett systematiskt sätt klarar denna typ av uppgifter löser vi här (b) och (d). I uppgift (b) inser man snabbt att man ska lösa $[2]x = [8]$. Eftersom $[2]$ saknar invers in $\mathbb{Z}_{10}$ tvingas vi gå tillbaka till grunderna och fundera över vad ekvationen definitionsmässigt betyder. Den betyder att att vi letar efter alla x som uppfyller att $(2+10k)x = 8+10m$ för något par av heltal, k och m. Detta betyder att $2x = 8+10(m-kx) = 8+10n$ där $n = m-kx$. Eftersom k om m ska tillåtas att variera mellan alla par av heltal följer det att n ska tillåtas variera bland alla heltal. Ekvationen $2x = 8+10n$ är en “vanlig” ekvation som har lösningen $x = 4+5n$, $n \in \mathbb{Z}$, eller, uttryckt med element i $\mathbb{Z}_{10}$, $x = [4]$ eller $x = [9]$.

   I (d) kommer vi snabbt till $[2]x = [3]$ och med samma resonemang som i (b) kommer vi fram till att vi ska lösa $2x = 3+10n$ där n får vara vilket heltal som helst. Denna ekvation har lösningen $x = 3/2+5n$ som vi direkt inser aldrig kan bli ett heltal hur n än väljs. Ekvationen $[2]x = [3]$ saknar alltså lösningar.

15. Att $a \equiv b \bmod mn$ betyder att $mn|a-b$ ur vilket det trivialt följer att $m|a-b$ och $n|a-b$.

16. Eftersom $n|ac-bc$, d v s $n|c(a-b)$ och n och c är relativt prima gäller att $n|a-b$.

17. 3904.

18. Patrik har 163 leksaksbilar.

19. (a) $x = 236+273n$, $n \in \mathbb{Z}$. (b) $x = 2115+2652n$, $n \in \mathbb{Z}$. (c) $x = 16b-15a+240n$, $n \in \mathbb{Z}$. (d) $x = 167+495n$, $n \in \mathbb{Z}$.

21. Man ska visa att $[(n-1)!] = [-1] = [n-1]$ i $\mathbb{Z}_n$ om och endast om n är ett primtal. Om n inte är ett primtal kan man antingen skriva $n = ab$ där a och b är olika tal där $2 \leq a, b \leq n/2$ eller $n = p^k$ för något primtal p och något heltal k. I det första fallet finns både $[a]$ och $[b]$ med i produkten $[(n-1)!] = [1][2][3]\ldots[n-1]$ och eftersom $[a][b] = [n] = [0]$ blir hela produkten $[0]$. I det andra fallet finns alla talen $[p], [2p], \ldots, [kp]$ med i produkten (såvida inte $n = 4$, men då är $[3!] = [2] \neq [3]$) varför hela produkten återigen blir $[0]$.

   Å andra sidan om n är ett primtal gäller att om $n|a^2-1$, d v s $n|(a+1)(a-1)$ gäller antingen att $n|a+1$ eller $n|a-1$, d v s antingen $[a] = [n-1]$ eller $[a] = [1]$. Detta betyder att det bara är dessa två element bland alla element i $\mathbb{Z}_n$ som är sina egna inverser. Detta i sin tur betyder att i produkten $[(n-1)!]$ slås alla andra element ut av sina inverser, varför $[(n-1)!] = [1 \cdot (n-1)] = [-1]$.

22. Följer direkt av uppgiften innan tillsammans med elementär kunskap om sinusfunktionen.

23. Tips: Använd binomialsatsen (ur nästa kapitel) i kombination med det faktum (som man förstås också måste visa) att eftersom p är prima gäller att $p|\binom{p}{k}$ då $1 \leq k \leq p-1$.

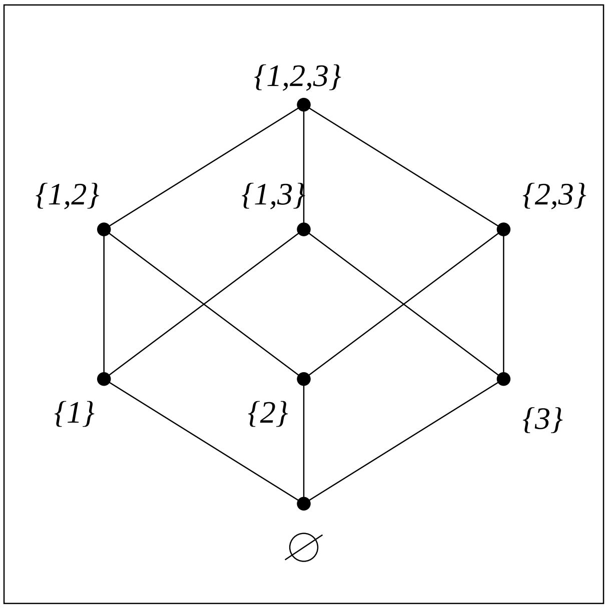
11.7 Kapitel 8

1. $6^3 = 216$.
2. (a) $5! = 120$, (b) $3! = 6$, (c) $7! = 5040$.
3. (a) $3!/2! = 3$, (b) $7!/2! = 2520$, (c) $11!/(5! \cdot 2! \cdot 2!) = 83160$.
5. $\binom{26}{8} = 1562275$.
6. $(x+2)^7 = x^7 + 14x^6 + 84x^5 + 280x^4 + 560x^3 + 672x^2 + 448x + 128$.
8. $\binom{n+r-1}{r}$ Tips: På hur många sätt kan man fördela r stycken likadana bollar på n stycken urnor?
9. (a) $8! = 40320$, (b) $18 \cdot 6! = 12960$, (c) $38 \cdot 6! = 27360$, (d) $(4!)^2 = 576$, (e) $5(4!)^2 = 2880$.
10. Med hjälp av binomialsatsen ser vi att

$$1 = (p + (1-p))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

11.8 Kapitel 9

1. Fall (d) är den enda icke sammanhängande grafen. Komponenterna är $(\{a,c\}, \{\{a,c\}\})$ och $(\{b,d\}, \{\{b,d\}\})$. Graferna i (a), (e) och (g) är träd. I övrigt gäller: (a) $d_a = d_c = 1$, $d_b = 2$. Det finns en Eulerväg mellan a och c men ingen Eulercykel. (b) $d_b = d_m = 3$, $d_k = d_d = 2$. En Eulerväg mellan b och m finns men ingen Eulercykel. (c) Alla gradtalen är 4. En Eulercykel finns. (d) Alla gradtalen är 1. Varken Eulerväg eller Eulercykel finns. (e) $d_a = 7$ medan all övriga gradtal är 1. Varken Eulerväg eller Eulercykel finns. (f) Alla gradtal är 4. En Eulercykel finns. (g) Samma graf som i (a). (h) Alla gradtal är 2 och en Eulercykel finns.
2. Tips: P.g.a. att $G = (V, E)$ är bipartit kan man skriva $V = A \cup B$ där A och B är disjunkta och där varje kant har ena änden i A och den andra i B. Därför måste varje väg vara i A exakt varannan gång.
4. I uppgift 1 är (c), (d), (f) och (k) reguljära. Den kublika grafen i uppgift 2 är inte reguljär.
5. För att klara induktionen, observera att att binärt träd av djup $n+1$ kan fås genom att sammanbinda urmödrarna i två binära träd av djup n via en "ururmoder".
6. Tips: För att visa att om det saknas väg av udda längd med start och mål i samma nod så måste G vara bipartit, låt $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$ vara en cykel som passerar varje kant minst en gång. Då måste n vara jämnt och man kan låta A vara mängen av alla v_k där k är udda och B motsvarande med k jämnt.
7. En ekvivalensrelation har en relationsgraf vars komponenter alla är fullständiga grafer. Den tomma relationen har en relationsgraf som saknar kanter.



Figur 11.1: Hassediagrammet till $(A, \subseteq)$ från övning 8.

8. Hassediagrammet finns i figur 11.1.

9. Om relationsgrafen saknar andra cykler än öglor och det gäller att xRy och yRx måste det gälla att $x = y$ ty annars skulle vi ha en cykel av längd 2. Å andra sidan om relationen är antisymmetrisk och det finns längre cykler än öglor $x_1, x_2, \ldots x_n, x_1$ skulle det för alla $i \neq 1$ enligt transitiviteten gälla att $x_1 R x_i$ och $x_i R x_1$ så att antisymmetrin medför att $x_1 = x_i$, d v s alla x_i är lika, en motsägelse.

10. Till K_4 finns 16 st uppspännande träd och till C_n finns n st.

11. Att $m_{ii} = 1$ betyder att det finns en ögla vid i. Att $m_{ij} = r$ betyder att det finns r stycken parallella kanter från i till j.

12. Grannmatrisen för den aktuella riktade grafen är

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi är intresserade av koefficienterna i M^k för $k = 1, 2, 3, 4$. Det gäller att

$$M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ur vilket man avläser antalet vägar mellan olika nodpar.

13. $f(1) = b$, $f(2) = e$, $f(3) = c$, $f(4) = d$, $f(5) = a$.

14. Den första och den tredje grafen är isomorfa.

11.9 Kapitel 10

1. Utfallsrummet väljs lämpligen som mängden av alla kombinationer av tre kulor och sannolikhetsfunktionen till $p(u) = 1/35$ för alla kombinationer u.

3. $(\binom{2}{1}\binom{5}{2})/35 = 4/7$.

4. Tips: Använd Sats 10.1.2(f).

5. 10 procent.

6. $(48! \cdot 4 \cdot 38!)/(35! \cdot 52!) \approx 0.031$.

7. Om man antar att personerna väljer hotell oberoende av varandra och att de alla väljer hotell på måfå får man att den sökta sannolikheten är
$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4} = \frac{5}{18}.$$

8. (a) $\frac{13\binom{4}{2}\binom{12}{3}4^3}{\binom{52}{5}}$, (b) $\frac{\binom{13}{2}\binom{4}{2}^2 44}{\binom{52}{5}}$, (c) $\frac{4^5 \cdot 10}{\binom{52}{5}}$, (d) $\frac{13\binom{4}{3}\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}}$, (e) $\frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}}$.

10. 11/50.

11. Det är orimligt att kalla det tre händelserna oberoende eftersom det är omöjligt för alla tre att inträffa samtidigt trots att var och en av dem har en positiv sannolikhet. Med andra ord:
$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C).$$

13. Tips: $P(A) = \sum_{j=1}^{r} P(A \cap B_j)$.

14. 3/5.

15. Vid bäst av fem matcher är svaret 0.68256 medan det vid bäst av sju matcher blir 0.710208.

16. Förväntad vinst är $360/37 \approx 9.73$. Sannolikheten för 50 vinstfria spel är $(36/37)^{50} \approx 0.254$.

17. $4195/19683 \approx 0.213$.

18. (a) 105/512, (b) 193/512, (c) 7/128 (d) 9/64.

19. (a) $3/(2\pi^2)$, (b) $1 - 205/(24\pi^2) \approx 0.135$, (c) $49/(6\pi^2) \approx 0.827$, (d) ∞.

21. Tips: Skriv $X = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$ och använd induktion över n.

22.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{n=0}^{\infty} xP(X=x) \\
&= 0P(X=0) + 1P(X=1) + 2P(X+2) + 3P(X+3) + P(X=4) + \dots \\
&= \Big(P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X+4) + \dots\Big) + \\
&\quad + \Big(P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + \dots\Big) + \\
&\quad + \Big(P(X=3) + P(X=4) + \dots\Big) + \dots \\
&= P(X \geq 1) + P(X \geq 2) + P(X \geq 3) + \dots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n).
\end{aligned}
$$

24. 38.99.

25. $-17/216$.

26. (a) 32.5, (b) 6.5.

27. Låt X vara antalet korrekta gissningar som Olof gör. Om Olof inte besitter någon spådomsförmåga blir X en $Bin(20, 1/2)$-fördelad stokastisk variabel och vi får att $P(X \geq 12) \approx 0.2517$ och att $P(X \geq 15) \approx 0.021$. Om Olof får 12 rätt finns det alltså ingen som helst anledning att låta sig övertygas; chansen är ju mycket god att lyckas minst så bra genom att bara gissa på måfå. Vid 15 rätt kommer saken i ett annat läge. Chansen att lyckas minst så bra bara genom att gissa är i stort sett inte mer än 1 på 50, så detta kan man se som ett statistiskt bevis av att något är på gång. (Dock skulle undertecknad aldrig tro att Olof verkligen kan se in i framtiden utan skulle dra slutsatsen att det förmodligen är något annat fel med undersökningen.)

28. $1/2$.

29. Det finns en stationär fördelning: $\pi_a = 1/8$, $\pi_b = 3/8$, $\pi_c = \pi_d = 1/4$.

31. Som exempel visas här att $Q(U) = 1$. Detta följer av att

$$Q(U) = P(U|A) = \frac{P(U \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$$

32. Om $P(A) = 0$ är A oberoende av alla händelser, så man kan fritt anta att $P(A) > 0$. Det gäller då att

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B^c) &= P(B^c|A)P(A) = (1 - P(B|A))P(A) \\
&= (1 - P(B))(P(A) = P(B^c)P(A)
\end{aligned}
$$

där den andra likheten följer av resultatet i föregående övning och den tredje likheten följer av att A och B är oberoende.