Matematik Chalmers

Tentamen i tma245 Matematik IT den 24 oktober 2002, kl. 14.15-18.15

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel

Telefonvakt: Elisabeth Wulcan, tel. 0740-450922

1. (6p) Som bekant kan man till varje par av heltal a och b finna två heltal u och v så att $au + bv = sgd(a, b)$. Använd detta till att visa att om c är ytterligare ett heltal så gäller att om a och b är relativt prima och $a|bc$ så medför detta att $a|c$.

   Ge också ett exempel som visar att förutsättningen att a och b är relativt prima är nödvändig, dvs ge ett exempel där $sgd(a, b) > 1$, $a|bc$, men $a \not| c$.

2. (6p) Det finns en sats som säger att om X och Y är två oberoende stokastiska variabler gäller att $Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y]$. Om X och Y är beroende gäller det i allmänhet inte att $Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y]$. Ge ett exempel som visar detta och peka på varför beviset av nämnda sats inte fungerar i detta fall.

3. (6p)

   (a) Vad säger binomialsatsen om utvecklingen av $(a+b)^n$, där $a, b \in \mathbf{R}$ och $n \in \mathbf{Z}_+$?

   (b) Välj a och b på ett lämpligt sätt för att på så sätt visa att $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

   (c) Man kan visa likheten i (b) genom ett rent kombinatoriskt resonemang om kombinationer. Gör detta. (Tips: Tänk på att om A är en mängd med n element så har $\mathcal{P}(A)$ precis 2^n element.)

4. (6p) Vilka av följande logiska argument är giltiga?

(a)
$$\begin{array}{r} p \to q \\ \sim p \\ \hline \therefore \sim q \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{r} p \vee q \\ \sim (p \wedge q) \\ p \to r \\ q \to s \\ \sim r \\ \hline \therefore\ s \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{r} p \vee q \\ p \to r \\ q \to (s \vee t) \\ r \to w \\ s \to w \\ t \to w \\ \hline \therefore\ w \end{array}$$

5. (7p) Funktionen f har intervallet $[0, \infty)$ som definitionsmängd och ges av
$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$
Visa att f är injektiv och bestäm målmängden så att f också blir surjektiv. Beräkna också inversen till f.

6. (6p) Visa att för alla $n \in \mathbf{Z}_+$ gäller att
$$\sum_{k=1}^{n} (3k(k-1)+1) = n^3.$$

7. (7p) Fru Svensson har fått veta att hennes syster drabbats av en svår ärftligt betingad sjukdom. Det är känt att risken att ett syskon till en drabbad person har arvsanlag som gör att även hon/han kommer att få sjukdomen är 10 %. Fru Svensson genomgår ett genetiskt test för att avgöra om hon bär på dessa anlag. Testet visar att så är fallet. Nu är dock inte testmetoden helt tillförlitlig; för en person som inte bär på anlagen i fråga är risken hela 20 % att testet felaktigt visar att man gör det, medan testet för personer som verkligen har dessa anlag ger felaktigt besked i 5% av fallen. Vad är sannolikheten att Fru Svensson verkligen har anlag för sjukdomen?

8. (6p) För vilket udda heltal m gäller att $403 \leq m \leq 696$, $3|m$ och $m \equiv 12 \bmod 49$?

/Johan Jonasson

Lösningar

1. Eftersom $sgd(a,b) = 1$ gäller det att det finns heltal u och v sådana att $au + bv = 1$. Multiplicera denna ekvation med c och få $acu + bcv = c$. Om man nu kan visa att a delar bägge termerna i vänsterledet följer att $a|acu + bcv$, dvs $a|c$. Men att a delar den första termen är uppenbart och att a delar den andra termen följer av förutsättningen $a|bc$.

   Om man tar bort förutsättningen att $sgd(a,b) = 1$ får vi ett motexempel med $a = 2$, $b = 2$, $c = 1$.

2. Låt X vara en godtyckligt stokastisk variabel med, $Var[X] > 0$, till exempel likformigt fördelad på $\{0,1\}$. Låt $Y = X$. Då blir $Var[X+Y] = Var[2X] = 4Var[X]$ medan $Var[X] + Var[Y] = 2Var[X]$. Problemet i beviset för oberoende stokastiska variabler ligger i att man vill kunna säga att $\mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y] = 0$ vilket i allmänhet inte gäller för beroende stokastiska variabler.

3. Binomialsatsen säger att

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

   Om man sätter $a = b = 1$ följer att

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k}$$

   dvs $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. I del (c) utnyttjar vi att 2^n är antalet delmängder av A som man kan skriva som summan av antalet kombinationer av storlek 0, antal kombinationer av storlek 1, ..., antal kombinationer av storlek n. Denna summa är just $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

4. Argumentet (a) är ogiltigt. Tag t.ex. $p = F$ och $q = S$. Argument (b) är giltigt, ty om slutsatsen är falsk betyder detta att $s = F$ och om hypoteserna ska vara sanna krävs att även $r = F$ så för att de två implikationerna ska vara sanna krävs att även p och q är falska vilket tvingar det första argumentet att vara falskt.

   Argument (c) är också giltigt, ty om $w = F$ och hypoteserna ska vara sanna följer att r, s och t alla är falska vilket tvingar även p och q till atta vara falska vilket i sin tur tvingar första argumentet att vara falskt.

5. Att f är injektiv följer av att om $f(a) = f(b)$ fäljer att $1/(1+a^2) = 1/(1+b^2)$, dvs $a^2 = b^2$ och eftersom f bara är definierad på $[0, \infty)$ följer det av detta att $a = b$.

   Värdemängden till f är $(0, 1]$ så om ska blir surjektiv är det denna mängd som ska väljas som målmängd.

   Inversen beräknas genom att man löser ekvationen $f(x) = y$, dvs $y = 1/(1+x^2)$. Lösningen är

$$x = \sqrt{\frac{1-y}{y}}$$

   dvs inversen ges av

$$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

6. Då $n = 1$ är både vänster- och högerledet 1, så den önskade likheten gäller för $n = 1$. Vi använder nu induktionsprincipen: Antag att likheten gäller då $n = p$ där p är ett godyckligt valt positivt heltal. Då gäller

$$\sum_{k=1}^{p+1}(3k(k-1)+1) = p^3 + 3(k+1)k + 1$$
$$= p^3 + 3p^2 + 3p + 1 = (p+1)^3$$

   dvs likheten gäller även för $n = p+1$. Den allmänna likheten följer nu av induktionsprincipen.

7. Låt S vara händelsen att fru Svensson har anlag för sjukdomen och låt T vara händelsen att fru Svenssons test visar att hon har anlag för sjukdomen.

   Vi söker $P(S|T)$ och givet i uppgiften är att $P(S) = 0.1$, $P(T|S) = 0.95$ och $P(T|S^c) = 0.2$.

   Vi får

$$P(S|T) = \frac{P(T \cap S)}{P(T)} = \frac{P(T|S)P(S)}{P(T \cap S) + P(T \cap S^c)}$$
$$= \frac{P(T|S)P(S)}{P(T|S)P(S) + P(T|S^c)P(S^c)} = \frac{0.95 \cdot 0.1}{0.95 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.9} = \frac{19}{55}.$$

8. Man ska lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x \equiv 1 & \mod \quad 2 \\ x \equiv 0 & \mod \quad 3 \\ x \equiv 12 & \mod \quad 49 \end{cases}$$

Man inser snabbt att de två första ekvationerna medför att $x = 6m + 3$ för något heltal m och om man använder detta i den tredje ekvationen får man $6m + 3 \equiv 12 \mod 49$, dvs

$$[6][m] + [3] = [12]$$

i $\mathbf{Z}_{49}$. Detta ger $[m] = [9][6]^{-1}$. Medelst gissning eller Euklides algoritm inser man att $[6]^{-1} = [41]$. Därför är $[m] = [9][41] = [26]$, dvs $m = 26 + 49n$ för något heltal n. Eftersom vi hade att $x = 6m + 3$ får vi $x = 6(26 + 49n) + 3 = 159 + 294n$.

Om vi till sist tar hänsyn till att $403 \leq x \leq 696$ ser vi att vi ska välja $n = 1$ och får då att $x = 453$. Svaret är alltså

$$x = 453.$$