Matematik Chalmers

Tentamen i tma245 Matematik IT, del A, den 17 januari 2003, kl. 14.14-18.15

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel

Telefonvakt: Martin Adiels, tel. 0740-450922

1. (7p)

   (a) Visa att om p är ett primtal och a är ett godtyckligt heltal gäller antingen att $p|a$ eller att $sgd(p, a) = 1$.

   (b) Visa att om p är ett primtal och a och b är heltal sådana att $p|ab$ gäller det att $p|a$ eller $p|b$.

   (c) Visa genom att ge ett motexempel att slutsatsen i (b) inte håller om man tar bort kravet på att p är ett primtal.

2. (6p) Låt $n \geq 2$ vara ett heltal och k ett heltal sådant att $0 \leq k \leq n-2$. Visa genom ett kombinatoriskt resonemang att

$$\binom{n+2}{k+2} = \binom{n}{k+2} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

3. (6p) Att två stokastiska variabler X och Y är oberoende betyder att $P(X = x \wedge Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$ för alla $x \in V_X$ och $y \in V_Y$. Visa att detta medför att $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$. Visa också genom motexempel att denna slutsats inte gäller om man frångår kravet att X och Y är oberoende.

4. (6p) Låt $A = \{1, 2, 3, 4\}$ och $B = \{r, b, g\}$. Ange $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(B)$, $A \times B$ och $B \times A$. Gäller det att $r \in \mathcal{P}(B)$? Gäller det att $(2, g) \in A \times B$?

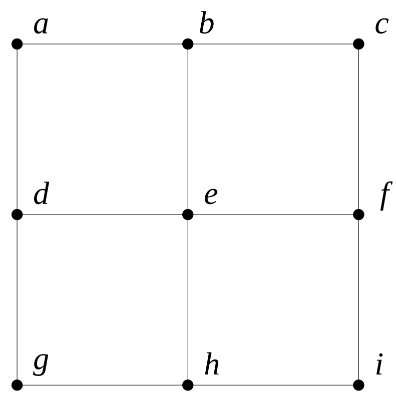
5. (6p) Betrakta grafen i figuren nedan.

   (a) Lägg till en kant så att den graf som bildas har en Eulerväg från b till d.

   (b) Lägg till en kant till så att den graf som bildas har en Eulercykel.

   Du måste givetvis argumentera för att det du åstadkommit är riktiga lösningar.

6. (6p) I en något annorlunda skidstafett ingick i varje lag tre deltagare och det kördes tio sträckor (på 3 km). Inom laget fick man fördela



sträckorna som man ville med restriktionen att varje deltagare skulle köra minst två sträckor. Ett lag utgjordes av Lisa, Pelle och Kajsa. Lisa tog i genomsnitt 11 minuter på sig för sina sträckor, Pelle tog 12 minuter på sig och Kajsa 15 minuter. Lagets sammanlagda tid blev 2 timmar och 1 minut. Hur många sträckor åkte var och en?

7. (6p) De fyra ishockeylagen A, B, C och D har gått till slutspel där A ställs mot B i semifinal medan C och D drabbar samman i den andra semifinalen. Segrarna möts sedan i en final där den slutlige mästaren koras. Både semifinaler och final spelas i bäst av tre matcher. I en given match gäller att

   - A slår B med sannolikheten 0.8,
   - A slår C med sannolikheten 0.7,
   - A slår D med sannolikheten 0.6,
   - D slår C med sannolikheten 0.6.

   Vad är sannolikheten att A blir mästare?

8. (7p) Finns det några heltal $n \geq 1$ sådana att kvoten

$$\frac{5^n - 1}{4^n - 1}$$

   blir ett heltal? (Ditt svar måste naturligtvis motiveras för att ge poäng.)

/Johan Jonasson

Lösningar

1. (a) Om $sgd(p, a) = d > 1$ gäller att $d|a$ och $d|p$. Eftersom p är ett primtal måste det då gälla att $d = p$.

   (b) Om inte $p|a$ gäller enligt (a) att $sgd(p, a) = 1$. Därför kan man finna två heltal u och v sådana att $au + pv = 1$. Multiplicera med b och få $b = abu + pbv$. Enligt förutsättning gäller att $p|abu$ och det är trivialt att $p|pbv$ varför $p|abu + pbv$, dvs $p|b$.

   (c) $6|(2 \cdot 3)$ men 6 delar varken 2 eller 3.

2. Låt A vara en mängd med $n + 2$ element och märk två av dessa med x och y. Antala sätt att välja ut $k + 2$ element är summan av antalet sätt att göra det med både x och y, med x men utan y, med y men utan x och utan både x och y. Därav inses att det önskade sambandet gäller.

3. $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$ $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ och $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{r\}, \{b\}, \{g\}, \{r, b\}, \{r, g\}, \{b, g\}, \{r, b, g\}\}$. $A \times B = \{(x, y) : x \in \{1, 2, 3, 4\}, y \in \{r, b, g\}\}$ och $B \times A = \{(x, y) : x \in \{r, b, g\}, y \in \{1, 2, 3, 4\}\}$. Det gäller inte att $r \in \mathcal{P}(B)$. Däremot är det sant att $(2, g) \in A \times B$.

4. Sätt $Z = XY$. Per definition av väntevärde gäller att

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{z \in V_Z} zP(Z = z).$$

Men

$$P(Z = z) = P(XY = z) = \sum_{x \in V_X} \sum_{y \in V_Y : xy = z} P(X = x \wedge Y = y)$$

$$= \sum_{x \in V_X} \sum_{y \in V_Y : xy = z} P(X = x)P(Y = y).$$

Genom att sätta in detta i definitionen och möblera om summan en aning får man

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{x \in V_X} \sum_{y \in V_Y} xyP(X = x)P(Y = y)$$

$$= \sum_{x \in V_X} xP(X = x) \sum_{y \in Y} yP(Y = y) = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

Det enklaste motexemplet får man om man låter X vara vilken stokastisk variabel som helst som inte är en konstant och låter $Y = X$. Exempelvis kan X vara 1 med sannolikheten $1/2$ och -1 med sannolikheten $1/2$. Då blir $XY = X^2 = 1$ så att $\mathbb{E}[XY] = 1$, medan $\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = (\mathbb{E}[X])^2 = 0$.

5. I (a) lägger vi till en kant mellan h och f. Då får alla noder utom b och d hämnt gradtal varför det finns en Eulerväg mellan dessa noder. I (b) kan vi dessutom lägga till en kant mellan b och d så att alla noder får jämna gradtal varför det finns en Eulercykel.

6. Låt x vara antalet sträckor som Lisa åkte, y antalet sträckor som Pelle åkte och z antalet sträckor som Kajsa tog hand om. Vi har ekvationssystemet
$$\begin{cases} 11x + 12y + 15z = 121 \\ x + y + z = 10 \end{cases}$$
Lös ut z ur den andra ekvationen och få att $z = 10 - x - y$ och sätt in detta i den första ekvationen vilket ger
$$11x + 12y + 15(10 - x - y) = 121$$
dvs
$$4x + 3y = 29.$$
Detta är en lösbar diofantisk ekvation, ty $sgd(4, 3) = 1$. Det gäller att $4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 1$ så att $4 \cdot 29 - 3 \cdot 29 = 29$, dvs $(29, -29)$ är en lösning. Den allmänna lösningen ges då av
$$(x, y) = (29 - 3n, -29 + 4n), n \in \mathbb{Z}.$$
Med $n = 8$ får vi $(x, y) = (5, 3)$ och med $n = 9$ får man $(x, y) = (2, 7)$. Detta är de enda fall som uppfyller villkoren i uppgiften. För fallet $x = 5, y = 3$ får man $z = 2$ vilket ger en godkänd lösning, medan fallet $x = 2, y = 7$ ger $z = 1$ vilket inte uppfyller villkoret att alla skulle åka minst två sträckor. Lösningen är alltså $(x, y, z) = (5, 3, 2)$, dvs att Lisa tog 5 sträckor, Pelle 3 sträckor och Kajsa 2 sträckor.

7. Antag att laget L möter motståndaren M och att varje match mellan dem slutar med seger för L med sannolikheten p. Om lagen möts tre gånger blir antalet segrar för L en binomialfördelad(3,p) stokastisk variabel, X. Vi får att sannolikheten att L står som slutsegrare är $P(X \geq 2) = p^3 + 3p^2(1-p) = 3p^2 - 2p^3$. Därför gäller för en matchserie om bäst av tre att

- A slår B med sannolikheten 0.896,
- A slår C med sannolikheten 0.784,
- A slår D med sannolikheten 0.648,
- D slår C med sannolikheten 0.648.

Låt E vara händelsen att A står som slutsegrare och F vara händelsen att D slår ut C. Då gäller att

$$P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap F^c) = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c)$$

$$= 0.896 \cdot 0.648 \cdot 0.648 + 0.896 \cdot 0.784 \cdot 0.352 \approx 0.623.$$

8. Man frågar om det finns några positiva heltal n sådana att $4^n - 1 | 5^n - 1$. Svaret är nej. För att inse detta gör vi olika analyser av fallen då n är udda respektive när n är jämnt.

   Om n är jämnt gäller $n = 2m$ för något positivt helta m så att $4^n - 1 = 4^{2m} - 1 = 16^m - 1 \equiv 1^m - 1 = 0 \bmod 5$, dvs $5 | 4^n - 1$. Om nu $4^n - 1$ ska dela $5^n - 1$ krävs då att även $5^n - 1$ är delbart med 5, vilket uppenbarligen inte är sant då ju $5^n - 1 \equiv 4 \bmod 5$ för alla n.

   I fallet då n är udda räknar vi istället mod 3: Eftersom n är udda kan vi skriva $n = 2m + 1$ för något ickenegativt heltal m. Vi har att $4^n - 1 \equiv 1^n - 1 = 0 \bmod 3$ för alla n, dvs $3 | 4^n - 1$ för alla n medan $5^n - 1 = 5^{2m+1} - 1 = 5 \cdot 25^m - 1 \equiv 2 \cdot 1^m - 1 = 1 \bmod 3$, dvs $5^n - 1$ är inte delbart med 3.