Rekursionsekvationer

Givet en rekursiv funktion är det i allmänhet svårt eller rent av omöjligt att hitta en explicit formel. Det finns dock en viktig klass av rekursioner, så kallade linjära rekursioner med konstanta koefficienter, för vilka det finns generella metoder. Vi ska titta på två olika metoder att bestämma explicita formler sådana rekursioner.

Definition 1 *En* **linjär rekursion med konstanta koefficienter av grad** *p är en rekursion på formen*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_p a_{n-p} + f(n),$$

där $c_i \in \mathbb{R}$ och f är en godtycklig funktion. Om $f(n) = 0$ för alla n så säger vi att rekursionen är **homogen**.

Exempel 1 *Fibonacci-talen F_n definieras som $F_0 = 0$, $F(1) = 1$ och*

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n > 1$$

vilket är en linjär homogen rekursion med konstanta koefficienter av grad 2.

Vi ska börja med att visa hur man hittar en allmän lösning i fallet då vi har en homogen lösning. För att göra det mer överskådligt så antar vi först att graden är 2 så vi har

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}.$$

Till att börja med "gissar" vi att det finns en lösning $a_n = r^n$ för något r. Sätter vi in detta i ekvationen så får vi

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2}.$$

Dividerar vi med r^{n-2} och flyttar över till vänsterledet så får vi

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0,$$

vilket kallas för den **karakteristiska ekvationen**. Antag att denna har rötterna r_1 och r_2. Då gäller att r_1^n och r_2^n båda uppfyller rekursionen. Men i själva verket är det så att varje $v_n = ar_1^n + br_2^n$ där a och b är konstanter uppfyller rekursionen. Detta ser vi genom direkt insättning i rekursionen

$$\begin{aligned}
v_n - c_1 v_{n-1} - c_2 v_{n-2} &= ar_1^n + br_2^n - c_1(ar_1^{n-1} + br_2^{n-1}) - c_2(ar_1^{n-2} + br_2^{n-2}) \\
&= a(r_1^n - c_1 r_1^{n-1} - c_2 r_1^{n-2}) + b(r_2^n - c_1 r_2^{n-1} - c_2 r_2^{n-2}) \\
&= a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Om det är två olika rötter till karakteristiska ekvationen så kan man visa att detta är alla möjliga lösningar. Om det däremot är en dubbelrot $r_1 = r_2$ så är en godtycklig lösning på formen

$$v_n = ar_1^n + bnr_1^n.$$

Det är en lätt övning att kontrollera att dessa är lösningar.

Exempel 2 *Vi återvänder till Fibonacci-talen* $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. *Den karakteristiska ekvationen blir* $r^2 - r - 1 = 0$. *Denna har lösningarna* $r_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$. *En allmän lösning till rekursionen ges alltså av*

$$F_n = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Nu har vi också två 'basfall' $F_0 = 0$ *och* $F_1 = 1$ *vilket ger*

$$\begin{cases} 0 = a + b, \\ 1 = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right), \end{cases}$$

som har lösningen $a = 1/\sqrt{5}$ *och* $b = -1/\sqrt{5}$. *Lösningen är alltså*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Observera att F_n *är ett heltal per definition av rekursionen så vår komplicerade formel ger alltså alltid ett heltal vilket inte är helt uppenbart när man ser den.*

Om vi har en rekursion av grad p så kommer också den karakteristiska ekvationen att vara av grad p. Vi kommer att få fler rötter men i övrigt fungerar det som i fallet $p = 2$ och en allmän lösning kommer att se ut som

$$a_n = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i r_i^n,$$

där α_i är godtyckliga konstanter och r_i är de olika rötterna till karakteristiska ekvationen.
En liten komplikation har man om den karakteristiska ekvationen har komplexa rötter. En lösning kommer förtfarande att vara av samma form men denna kommer nu att innehålla potensen av komplexa tal vilket kan vara kämpigt. Men man kan skriva om den med hjälp av följande två likheter. Först bryter vi ut absolutbeloppet av det komplexa talet och trigonometrin ger oss

$$x + iy = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \sqrt{x^2+y^2}\,(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

där α är vinkeln mellan $(x\ y)^t$ och x-axeln (i positiv led). Anledningen är att det är enkelt att ta potensen av ett komplext tal med beloppet 1. Vi har nämligen

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$$

som kallas deMoivres formel.

Anmärkning 1 *Man definierar $e^{i\alpha}$ som*

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

och då är deMoivres formel inget annat än potensregeln $(e^{i\alpha})^n = e^{i\alpha n}$. Speciellt får man $e^{i\pi} = -1$ vilket är en elegant formel som sammanför matematikens viktigaste konstanter.

Vi visar med ett exempel hur man gör för att utnyttja detta när man får komplexa rötter till den karakteristiska ekvationen.

Exempel 3 *Betrakta rekursionsekvationen $a_n = 2a_{n-1} - 4a_{n-2}$. Denna har karakteristiska ekvationen $r^2 - 2r + 4 = 0$ som har lösningarna $r_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}$. En allmän lösning ser alltså ut som*

$$a_n = ar_1^n + br_2^n = a(1 + i\sqrt{3})^n + b(1 - \sqrt{3})^n.$$

Genom att använda de två likheterna ovan så får vi

$$\begin{aligned} a_n &= a(1+i\sqrt{3})^n + b(1-\sqrt{3})^n = 2^n a\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + 2^n b\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \\ &= 2^n a(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)) + 2^n b(\cos(\pi/3) - i\sin(\pi/3)) \\ &= 2^n((a+b)\cos(\pi/3) + (a-b)i\sin(\pi/3)) = 2^n(c\cos(\pi/3) + d\sin(\pi/3)), \end{aligned}$$

där $c = a + b$ och $d = (a - b)i$ är två nya godtyckliga konstanter.

Ickehomogena rekursionsekvationer

Vi ska nu se hur man kan angripa en linjär rekursion som inte är homogen. Antag att vi har en rekursion på formen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_p a_{n-p} + f(n).$$

Låt h_n vara en godtycklig lösning till motsvarande homogena ekvation

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_p a_{n-p},$$

och låt q_n vara någon lösning till den ursprungliga ekvationen. Då gäller att $v_n = h_n + q_n$ är en lösning till rekursionen eftersom

$$\begin{aligned} v_n &= h_n + q_n = (c_1 h_{n-1} + c_2 h_{n-2} + \cdots + c_p h_{n-p}) \\ &+ (c_1 q_{n-1} + c_2 q_{n-2} + \cdots + c_p q_{n-p} + f(n)) \\ &= c_1 v_{n-1} + c_2 v_{n-2} + \cdots + c_p v_{n-p} + f(n). \end{aligned}$$

Det är inte svårt att visa att alla lösningar är på den formen. Så om man bara kan hitta en lösning så hittar vi alla genom att titta på motsvarande homogena ekvation.
När det gäller att hitta någon lösning för den ickehomogena rekursionen så finns det ingen allmän metod men alla medel är tillåtna. En bra strategi är att ansätta a_n som något som ser ut som $f(n)$. Exempelvis om $f(n)$ är ett polynom av grad k så ansätt a_n som ett polynom av grad k och om $f(n)$ är på formen ab^n så ansätt a_n som kb^n där k är den koefficient man måste bestämma (b är samma b som i f).

Exempel 4 *Betrakta rekursionen* $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - n$. *För att hitta en lösning så ansätter vi* $a_n = a + bn$. *Sätter vi in detta i ekvationen och flyttar över till högerledet så får vi*

$$0 = -(a + bn) + a + b(n - 1) + a + b(n - 2) - n = a - 3b + n(b - 1).$$

Vilket har den unika lösningen $b = 1$ *och* $a = 3$. *Alltså är* $q_n = 3 + n$ *en lösning till ekvationen och den allmänna lösningen blir då (se exemplet ovan för lösningen till det homogena systemet)*

$$a_n = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + (3+n).$$