Affina avbildningar

Teoriövningar

1. Bestäm matriserna för följande linjära avbildningar:

   (a) i två dimensioner:
   - Rotation moturs θ radianer kring origo.
   - Skalning med en faktor s.
   - Ortogonal projektion på x-axeln respektive y-axeln.

   (b) i tre dimensioner:
   - Rotation moturs θ radianer kring z-axeln.
   - Skalning med en faktor s.
   - Ortogonal projektion på xy-planet, yz-planet respektive xz-planet.

2. När man sysslar med grafik är utöver linjära avbildningar också translationer mycket viktiga. En translation med en vektor $\mathbf{b}$, $T_{\mathbf{b}}$, är helt enkelt addition med vektorn $\mathbf{b}$:

$$T_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

   (a) Visa att en translation **inte** är en linjär avbildning (om $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$).

   (b) Låt $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ vara en linjär avbildning med matrisen $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Beräkna $T_{\mathbf{b}} \circ f(\mathbf{x})$ och $f \circ T_{\mathbf{b}}(\mathbf{x})$. När är de lika?

3. En affin avbildning är en sammansättning av en linjär avbildning och en translation så den ser ut som $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ med A en matris och $\mathbf{b}$ en vektor.

   (a) Visa att sammansättningen av två linjära avbildningar är en linjär avbildning. Vilken räkneregel är det ni utnyttjar?

   (b) Visa att sammansättningen av två affina avbildningar är en affin avbildning.

   (c) Låt f_t vara funktionen som roterar runt punkten $(1, 1)$ t grader moturs. Visa att f_t är en affin avbildning genom att bestämma en matris A och en vektor $\mathbf{b}$ sådana att

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Datorövningar

1. Konstruera matlab-funktioner som

   (a) har argumentet s och ger den 2×2-matris som svarar mot skalning med s.

   (b) har ett argument t och ger den 2×2-matris som svarar mot rotation t radianer moturs.

2. (a) Konstruera en funktion som har tre argument A, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{x}$ där A är en 2×2-matris och $\mathbf{b}$ och $\mathbf{x}$ är 2-vektorer. Funktionen ska sedan plotta punkterna $\mathbf{x}$ och $A\mathbf{x} + \mathbf{b}$.

   (b) Samma som första deluppgiften fast plotta de två punkterna i två delfönster genom att använda `SUBPLOT`.

3. Samma som uppgift 2 fast låt nu istället X vara en 'vektor' av n punkter lagrade som en $2 \times n$-matris. Funktionen ska rita den polygon med punkterna i X som hörn samt motsvarande polygon då man tar $A\mathbf{x}+\mathbf{b}$ för de olika punkterna $\mathbf{x}$ i X. Exempelvis ska

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   ge en enhetskvadrat. Testa din funktion med lite olika matriser (t ex de från första uppgiften), vektorer $\mathbf{b}$ och polygoner X. Ett tips är att ta en lite oregelbunden polygon för att bättre se effekterna av den affina avbildningen.

4. I den här uppgiften kommer du att ha användning av kommandona `GETFRAME` och `MOVIE` (samt en funktion du gjort själv redan).

   (a) Gör en film som illustrerar en sekundvisare.

   (b) Utöka så att den också har minut- och tim-visare. (Här tillåter du lämpligen tiden att gå lite snabbare så att det blir lite "action".)