Linjärkombinationer, baser

Definition 1 *Låt* $\mathbf{v}_1$ *och* $\mathbf{v}_2$ *vara två vektorer. En vektor* $\mathbf{v}$ *på formen*

$$\mathbf{v} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2,$$

där $a, b \in \mathbb{R}$ *kallas då för en* **linjärkombination av** $\mathbf{v}_1$ *och* $\mathbf{v}_2$*. Mer allmänt så kallas en vektor* $\mathbf{v}$ *på formen*

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i,$$

där $a_i \in \mathbb{R}$ *för en linjärkombination av* $\{\mathbf{v}_i\}$.

Exempel 1 *Låt* $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_x$ *och* $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_y$*. Då är en linjärkombination av* $\mathbf{e}_x$ *och* $\mathbf{e}_y$ *en vektor*

$$\mathbf{v} = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Vi ser här alltså att varje 2-vektor är en linjärkombination av $\mathbf{e}_x$ *och* $\mathbf{e}_y$*. Om vi istället tar* $\mathbf{e}_x$ *och* $\mathbf{e}_y$ *i tre dimensioner så får vi*

$$\mathbf{v} = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alla linjärkombinationer är i det här fallet alltså vektorerna i xy*-planet.*

Definition 2 *Vi säger att vektorerna* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ *är* **linjärt oberoende** *om enda lösningen* $\{a_i\}$ *till*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

är den triviala lösningen $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$*. Om de inte är linjärt oberoende så säger vi att de är* **linjärt beroende**.

Exempel 2 *Vektorerna* $\mathbf{e}_x$ *och* $\mathbf{e}_y$ *är linjärt oberoende ty*

$$\mathbf{0} = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

vilket endast har lösningen $a = b = 0$.

Proposition 1 *Två vektorer* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \neq 0$ *är linjärt beroende om och endast om de är parallella.*

Bevis. Antag första att $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är linjärt beroende, d v s det finns $(a, b) \neq (0, 0)$ sådana att $0 = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$. Vi kan anta att $a \neq 0$. Det ger

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{b}{a}\mathbf{v}_2$$

och alltså är $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ parallella.
Omvänt så antag att $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är parallella. Då är $\mathbf{v}_1 = k\mathbf{v}_2$ för något $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ så

$$\mathbf{0} = \mathbf{v}_1 - k\mathbf{v}_2$$

vilket visar att $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är linjärt beroende. □

På samma sätt kan man också visa följande mer generella resultat:

Proposition 2 *Vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ är linjärt beroende om och endast om en av dem kan uttryckas som en linjärkombination av de andra.*

Exempel 3 *Tag $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_x$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_y$ och $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i tre dimensioner. Då är*

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

så $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ är linjärt beroende. Dessutom får vi t ex att

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_3$$

genom att lösa ut $\mathbf{v}_1$.

Definition 3 *Vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ säges utgöra en* **bas** *om varje vektor kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ på ett unikt sätt. Om $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ är en bas och*

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i$$

så säger vi att $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ är $\mathbf{v}$:s **koordinater i basen** $\{\mathbf{v}_i\}$.

Exempel 4 *Vi har tidigare infört basen $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ för alla 2-vektorer och tillhörande koordinatsystem. Men man kan ta vilka två vektorer som helst som är $\neq \mathbf{0}$ och ej parallella och låta dem utgöra en bas. Låt t ex $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i basen $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$. Då är*

$$\mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{v} + 0 \cdot \mathbf{e}_y$$

så i basen $(\mathbf{v}, \mathbf{e}_y)$ har $\mathbf{v}$ koordinater $(1, 0)$. Vi har också

$$\mathbf{e}_x = \frac{1}{2}\mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{e}_y,$$

så $\mathbf{e}_x$ har koordinaterna $(1/2, -1/2)$ i basen $(\mathbf{v}, \mathbf{e}_y)$.

Följande proposition ger ett alternativt villkor för en mängd vektorer att utgöra en bas.

Proposition 3 *Vektorerna* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *utgör en bas om och endast om de är linjärt oberoende och varje vektor kan skrivas som en linjärkombination av dem.*

Anmärkning 1 *Vi har tidigare använt begreppet dimension utan att ge någon formell definition. En naturlig definition av begreppet är helt enkelt att låta dimensionen vara antalet element i en bas. Detta stämmer överens med vår intuitiva uppfattning av dimension för planet (som alltså har* 2 *basvektorer) och rummet (som har* 3 *basvektorer).*

Skalärprodukt

Definition 4 *Låt* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *vara två vektorer och låt* α *vara minsta vinkeln mellan dem. Då definierar vi* **skalärprodukten** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ *genom*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cdot \cos \alpha.$$

Exempel 5 *Vi tittar på följande två extrema exempel:*

1. *Låt* $\mathbf{u}$ *vara vilken vektor som helst. Då är*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}||\mathbf{u}| \cdot \cos 0 = |\mathbf{u}|^2.$$

2. *Antag att* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. *Då gäller att*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cdot \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = 0$$

   vilket är ekvivalent med att $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *är ortogonala.*

Observera att skalärprodukten av två vektorer är ett reellt tal, inte en vektor. Skalärprodukt är alltså ingen operator på mängden av vektorer. Skalärprodukten uppfyller följande räkneregler:

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.
2. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}),\ c \in \mathbb{R}$.
3. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.

Skalärprodukten är enkel att räkna ut om man har vektorerna givna i koordinater m a p en ON-bas.

Sats 1 *Antag att* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *har koordinaterna* $\binom{x_1}{y_1}$ *respektive* $\binom{x_2}{y_2}$ *i en ON-bas* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. *Då gäller att*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Bevis. Vi får m h a räknereglerna ovan och $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1$ och $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$ att

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2) \cdot (x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2) \\ &= x_1x_2(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) + x_1y_2(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) + y_1x_2(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1) + y_1y_2(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2) \\ &= x_1x_2 + y_1y_2. \end{aligned}$$

$\square$

Exempel 6 *Vi vill beräkna vinkeln mellan vektorerna med koordinaterna i någon ON-bas givna av* $\binom{2}{1}$ *respektive* $\binom{3}{4}$.
Från $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cdot \cos\alpha$ *får vi*

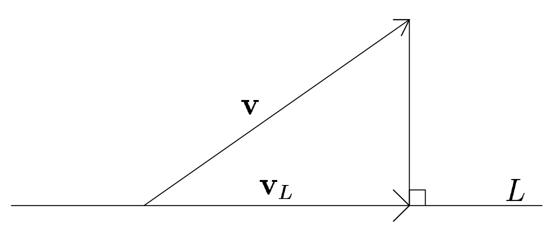
$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{\sqrt{5} \cdot 5} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Alltså är $\alpha = \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Anmärkning 2 *Motsvarande resultat gäller i 3 (och även i högre) dimensioner. Det är mycket viktigt att basen är ortonormerad. Titta en gång till på beviset och övertyga dig om detta.*

Definition 5 *Låt* $\mathbf{v}$ *vara en vektor och* L *en linje. Den* **ortogonala projektionen** *av* $\mathbf{v}$ *på* L, $\mathbf{v}_L$, *definieras som den vektor som är parallell med* L *och sådan att*

$$\mathbf{v}_L \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_L) = 0.$$



Sats 2 *Låt* $\mathbf{e}$ *vara en enhetsvektor parallell med linjen* L. *Den ortogonala projektionen av* $\mathbf{v}$ *på* L *ges av*

$$\mathbf{v}_L = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{v})\mathbf{e}.$$

Bevis. Vi vet att $\mathbf{v}_L = t \cdot \mathbf{e}$ för något $t \in \mathbb{R}$ eftersom e och $\mathbf{v}_L$ båda är parallella med L. Vidare är $0 = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_L)$ per definition av ortogonal projektion. Vi får

$$0 = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_L) = \mathbf{e} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{v}_L = \mathbf{e} \cdot \mathbf{v} - t\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{v} - t.$$

Alltså är $t = \mathbf{e} \cdot \mathbf{v}$ och $\mathbf{v}_L = t\mathbf{e} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{v})\mathbf{e}$. $\square$

Exempel 7 *Bestäm den ortogonala projektionen på linjen parallell med* $\mathbf{v} = \binom{1}{1}$.
Normering av $\mathbf{v}$ *ger*

$$\mathbf{e} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Projektionen av en vektor $\binom{x}{y}$ *ges alltså enligt satsen ovan av*

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_L &= \left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot\mathbf{e}\right)\mathbf{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}(x+y)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x+y\\x+y\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Vi ser av detta att denna projektion är en linjär avbildning och detta gäller för ortogonala projektioner i allmänhet. (Visa detta genom att imitera det här exemplet med $\mathbf{v}$ *utbytt mot en godtycklig vektor.)*