Linjära avbildningar och fraktaler

Teoriövningar

1. Låt $\mathbf{e} = \binom{a}{b}$ vara en godtycklig enhetsvektor.

   (a) Vad ger det faktum att $\mathbf{e}$ är en enhetsvektor för villkor på a och b?

   (b) Bestäm matrisen P för den linjära avbildning som projicerar ortogonalt på $\mathbf{e}$.

   (c) Vad är P^2, P^3 och P^n för ett godtyckligt positivt heltal n? Kan man tänka ut det utan att räkna?

   (d) Vad är $\det P$? Kan man tänka ut det utan att räkna?

   (e) Vad är P^{-1}?

2. Låt $\mathbf{u} = \binom{a}{c}$ och $\mathbf{v} = \binom{b}{d}$.

   (a) Bestäm matrisen M som avbildar $\mathbf{e}_x$ och $\mathbf{e}_y$ på $\mathbf{u}$ respektive $\mathbf{v}$.

   (b) Sammanfatta ert svar i första uppgiften som en likhet mellan de tre matriserna M, $(\mathbf{u}\ \mathbf{v})$ och $(\mathbf{e}_x\ \mathbf{e}_y)$.

   (c) Bestäm den matris N som avbildar vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ på $\mathbf{e}_x$ respektive $\mathbf{e}_y$.

   (d) Finns det någon relation mellan M och N?

   (e) Bestäm den matris som avbildar vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ på $\mathbf{w} = \binom{e}{f}$ respektive $\mathbf{x} = \binom{g}{h}$. Tips: Utnyttja något ni redan gjort.

3. Låt $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

   (a) Vad gör A med $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$respektive en godtycklig vektor $\mathbf{v} = \binom{x}{y}$?

   (b) Beräkna A^n och $\det A^n$. Vad händer med $\det A^n$ då $n \longrightarrow \infty$?

   (c) Vad gör A^n med $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ respektive en godtycklig vektor $\mathbf{v}$? Vad händer med riktningen för vektorn $A^n\mathbf{v}$ då n växer?

   (d) Vi definierar en följd av vektorer $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots$ rekursivt genom

   $$\begin{cases} \mathbf{v}_0 = \mathbf{v} \\ \mathbf{v}_n = A\mathbf{v}_{n-1},\ n \geq 1. \end{cases} \tag{1}$$

   Vad är $\mathbf{v}_n$ explicit? Bevisa ert påstående.

Datorövningar

Slutmålet med övningen är att konstruera matlabkod som genererar så kallade IFS-fraktaler men vi tar det i steg.

1. Konstruera en funktion som har tre argument; en 2×2-matris A, en 2-vektor $\mathbf{v}$ och ett positivt heltal n. Funktionen ska generera n stycken vektorer rekursivt som i (1), lägga dem i en $2 \times n$ matris och och sedan plotta ut dem som punkter. Tips: Det är bra att alltid först göra plats i minnet om man vet hur stor en matris ska vara. Man kan t ex använda kommandot ZEROS för detta ändamålet.

2. Testa er funktion på följande (och gärna andra också) olika matriser och vektorer:
   (a) $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{smallmatrix}\right)$ och några olika startvektorer.
   (b) A sammansättning av en rotation kring origo och en skalning med s. Det finns ett 'kritiskt' s-värde. Vilket? Kan ni göra en inåtgående spiral?

3. Gör en ny funktionen som istället för att hela tiden ta samma matris A varje gång tar en ny 'slumpmatris' med determinanten = 1. (Den har alltså då bara två argument $\mathbf{v}$ och n). Tips: Man kan använda sig av RANDOM. Låt 3 av de 4 värdena vara slumpmässiga (på något sätt) och bestäm det sista så att determinanten blir 1. Testa funktionen ett par gånger.

4. Dags nu att göra en kommandofil som genererar 'Barnsleys ormbunksblad'. Denna genereras av 4 stycken affina avbildningar $A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ som har matriser respektive vektorer givna av

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix},\ \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix},\ \mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.44 \end{pmatrix}.$$

   Man kan generera ormbunksbladet genom att rekursivt definiera nya punkter som i (1) fast i varje steg så väljer man en av de 4 affina avbildningarna med en given sannolikhet. Lämpliga sannolikheter för de 4 avbildningarna kan vara 1, 85, 7 respektive 7%. Tips: Det finns flera olika sätt att lösa slumpmässigheten. Ett effektivt sätt är att först generera en $2 \times m$-matris respektive en $2 \times 2m$-matris som innehåller så många kopior av vektorerna respektive matriserna som svarar mot deras sannolikhet. Fördelningen 'unid' för RANDOM kan då t ex användas.

5. Gör om fraktalprogrammet så att det blir en funktion som har antal punkter, en lista med matriser, en lista med vektorer och en sannolikhetslista som argument och som genererar motsvarande IFS-figur. Sök exempel på affina avbildningar på nätet (se t ex referens på hemsidan) eller försök hitta på egna. (Lyckas ni väl med att hitta på någon egen så är jag nyfiken.)