

## Sammanfattning

Låt  $f$  och  $g$  vara två linjära avbildningar med motsvarande matriser  $A$  och  $B$ . Vi får då

$$f \circ g(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x})) = f(B\mathbf{x}) = A(B\mathbf{x}) = (AB)\mathbf{x},$$

så att sammansättningen är också en linjär avbildning och den har matrisen  $AB$ .

**Anmärkning 1** Det faktum att  $AB \neq BA$  i allmänhet ger att i allmänhet är  $f \circ g \neq g \circ f$ .

**Exempel 1** Låt  $f$  och  $g$  vara rotation kring origo i planet med  $s$  respektive  $t$  radianer moturs. Då är deras motsvarande matriser

$$A = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix} \text{ respektive } B = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Sammanfattningen  $f \circ g (= g \circ f)$  är ju rotation  $s + t$  radianer moturs så vi måste ha

$$AB = \begin{pmatrix} \cos(s+t) & -\sin(s+t) \\ \sin(s+t) & \cos(s+t) \end{pmatrix}.$$

Men samtidigt så får vi genom att multiplicera matriserna att

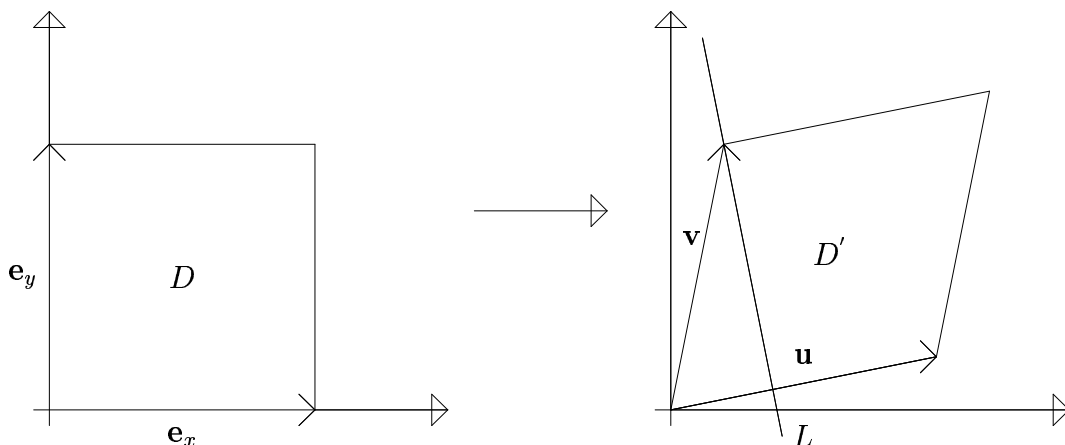
$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos s \cos t - \sin s \sin t & -\sin s \cos t - \cos s \sin t \\ \sin s \cos t + \cos s \sin t & \cos s \cos t - \sin s \sin t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Från detta får vi de trigonometriska identiteterna

$$\begin{aligned} \cos(s+t) &= \cos s \cos t - \sin s \sin t \\ \sin(s+t) &= \sin s \cos t + \cos s \sin t. \end{aligned}$$

## Determinant

Låt  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Betraktad som linjär avbildning så avbildar  $M$  enhetskvadraten på en parallelogram som spänns av vektorerna  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$



där  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  och  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ . Arealen av parallelogrammen  $D'$ ,  $A(D')$ , ges av

$$A(D') = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}_L|$$

där  $\mathbf{v}_L$  är den ortogonala projektionen av  $\mathbf{v}$  på linjen  $L$  som är ortogonal mot  $\mathbf{u}$ . En riktningsvektor för  $L$  av längd 1 ges av

$$\mathbf{e} = \pm \frac{1}{|\mathbf{u}|} \begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix}.$$

(Tecknet beror på 'orienteringen' av  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$ .) Vi får alltså

$$\begin{aligned} A(D') &= |\mathbf{u}| |\mathbf{v}_L| = |\mathbf{u}| |(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}| |\mathbf{e}| \\ &= |\mathbf{u}| \left| \frac{1}{|\mathbf{u}|} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix} \right| = |ad - bc|. \end{aligned}$$

**Definition 1** Låt  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Vi definierar då determinanten av  $M$ ,  $\det M$ , som

$$\det M = ad - bc.$$

Vi inför också beteckningen

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Vad händer om vi istället tar en rektangel med sidorna  $s\mathbf{e}_x$  respektive  $t\mathbf{e}_y$ ? Jo bilden kommer då att vara parallelogrammen som spänns upp av  $s\mathbf{u}$  och  $t\mathbf{v}$ . Detta är samma parallelogram man får om man avbildar enhetskvadraten med matrisen  $M' = \begin{pmatrix} sa & tb \\ sc & td \end{pmatrix}$  så att parallelogrammen kommer att ha arean

$$|\det M'| = |sa \cdot td - tb \cdot sc| = |st| \cdot |ad - bc| = |st| |\det M|.$$

Vi får alltså

$$\frac{\text{Arealen av bilden}}{\text{Arealen av rektangeln}} = \frac{|st| \cdot |\det M|}{|st|} = |\det M|.$$

Man kan visa att samma resultat gäller för mer komplicerade områden och vi har följande lite oprecisa sats.

**Sats 1** Antag att  $D$  är ett "snällt och hyggligt" område i planet och låt  $D'$  vara bilden av  $D$  under den linjära avbildningen given av matrisen  $M$ . Då gäller att

$$\frac{\text{Arealen av } D'}{\text{Arealen av } D} = |\det M|.$$

Determinatens absolutbelopp ger alltså areaförändringen hos en linjär avbildning.

Följande räkneregler för determinant kan man lätt visa genom direkt räkning.

1.  $\det(c\mathbf{u} \ \mathbf{v}) = c \cdot \det(\mathbf{u} \ \mathbf{v})$

2.  $\det(\mathbf{v} \ \mathbf{u}) = \det(\mathbf{u} \ \mathbf{v})$
3.  $\det(\mathbf{u} \ \mathbf{v} + \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u} \ \mathbf{v}) + \det(\mathbf{u} \ \mathbf{w})$
4.  $\det(\mathbf{u} \ \mathbf{u}) = 0$
5.  $\det M \det M^t$

Här betyder  $(\mathbf{u} \ \mathbf{v})$  den matris som har  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  som sina kolonner.

**Definition 2** Determinanten för en  $3 \times 3$ -matris ges av

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1(y_2z_3 - y_3z_2) + x_2(y_3z_1 - y_1z_3) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1).$$

Vi ska senare visa att determinanten för en  $3 \times 3$ -matris spelar samma roll som determinanten för en  $2 \times 2$ -matris. Vi har bla

**Sats 2** Antag att  $D$  är ett "snällt och hyggligt" område i rummet och låt  $D'$  vara bilden av  $D$  under den linjära avbildningen given av matrisen  $M$ . Då gäller att

$$\frac{\text{Volymen av } D'}{\text{Volymen av } D} = |\det M|.$$

Med lite större ansträngning än för  $2 \times 2$ -matriser kan man visa att också determinanten för  $3 \times 3$ -matriser uppfyller räknereglererna ovan. Ett exempel på hur man kan utnyttja dem:

**Exempel 2** Vi använder reglerna 3. och 4. i följande räkning:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3+2 \\ 4 & 1 & 4+1 \\ 6 & -2 & 6-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 6 & -2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0.$$

Mer generellt så antag att 3:e kolonnen är en linjärkombination av de två första. Vi får då på samma sätt som i exemplet

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) &= \det(\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ c\mathbf{u}) + \det(\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ d\mathbf{v}) \\ &= c \cdot \det(\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{u}) + d \cdot \det(\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{v}) = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Detta stämmer ju väl överens med satsen om volymförändring, ty om 3:e kolonnen är en linjärkombination av de två andra så kommer de att ligga i ett plan och volymen blir därmed 0.

Ett annat sätt att formulera detta på är att tre vektorer i rummet ligger i ett plan om och endast om matrisen med vektorerna som kolonner har determinanten lika med 0.

Satserna om area- respektive volymförändring ger att

$$|\det AB| = |\det A| |\det B|,$$

eftersom förändringen för den sammansatta funktionen  $AB$  måste vara produkten av de för  $A$  och  $B$ . Man kan visa (tex genom direkt räkning) att i själva verket gäller att

$$\det AB = \det A \det B,$$

## Invers

**Definition 3 Identitetsmatrisen** (*enhetsmatrisen*) av storlek  $n$ ,  $I = I_n$ , är den  $n \times n$ -matris som har ettor på diagonalen och nollor för övrigt.

Den kallas för identitetsmatris eftersom den verkar som identitet vid multiplikation, d v s

$$A = I_n A = A I_n,$$

för alla  $n \times n$ -matriser  $A$ .

**Definition 4** Låt  $A$  vara en kvadratisk matris. En matris  $B$  kallas för **inversen till  $A$**  om

$$AB = BA = I$$

Om en sådan matris existerar så betecknas den  $A^{-1}$ .

**Exempel 3** Låt  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  och antag att  $\det A \neq 0$ . Då är

$$B = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

en invers till  $A$  vilket man lätt kontrollerar genom att multiplicera  $A$  och  $B$ .

Vi såg i exemplet att om  $A$  är en  $2 \times 2$ -matris och  $\det A \neq 0$  så har  $A$  en invers. Omvänt så har vi

$$1 = \det I = \det AA^{-1} = \det A \cdot \det A^{-1}$$

så

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Detta ger att  $\det A \neq 0$  är nödvändigt för att  $A^{-1}$  ska existera. Det sista argumentet gäller även för  $3 \times 3$ -matriser (och även godtycklig storlek i själva verket). Vi har alltså för  $2 \times 2$ -matriser visat att

$$A^{-1} \text{ existerar} \iff \det A \neq 0.$$

Detta påstående gäller även för godtycklig storlek vilket vi återkommer till senare.