Linjer, plan m m

Teoriövningar

1. Vi har sett att en linje i planet kan beskrivas antingen med en likhet $Ax + By + C = 0$ eller på parameterform

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_x \\ y = y_0 + tv_y. \end{cases}$$

   (a) Gör samma sak för en cirkel med centrum i origo och radien r, d v s en likhet och en parametrisering som beskriver cirkeln.

   (b) Ta nu istället en cirkel med centrum i en godtycklig punkt (x_0, y_0).

   (c) Låt $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Bestäm bilden av en cirkel med centrum i origo under den linjära avbildningen som ges av A. Bestäm en parametrisering och en ekvation för bilden.

   (d) Bestäm en parametrisering av kurvan $x^4 + y^4 = r^2$. Eventuellt kan man ha nytta av funktionen

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{om } x > 0, \\ 0, & \text{om } x = 0, \\ -1, & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

2. Lös uppgift 2.57a i boken. Låt de 9 procenttalen utgöra en 3×3-matris och antag att en 3-vektor $\mathbf{v}$ innehåller antalet i storstad, tätort respektive landsbygd. Hur många finns det i de tre olika kategorierna efter 1 år? Efter 2 år? Efter n år? (Inga siffror. Bara bokstäver.)

3. Hur många multiplikationer av par av tal krävs det för att multiplicera en $m \times n$-matris med en $n \times p$-matris?

4. Antag att vi är i $\mathbb{R}^3$.

   (a) Vad blir lösningsmängden till (d v s vilken typ av objekt)

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

   Det finns olika alternativ. Försök ge villkor på koefficienterna för att de olika fallen ska inträffa. (Tänk geometriskt!)

   (b) Vad blir lösningsmängden till (d v s vilken typ av objekt)

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases}$$

   Det finns återigen olika alternativ. Försök ge villkor på koefficienterna för att de olika fallen ska inträffa.

5. Kolla upp vad under- respektive övertriangulär matris betyder.

(a) Vad händer om man multiplicerar en över-(under-)triangulär matris med en annan över-(under-)triangulär matris? Vad händer om man multiplicerar en övertriangulär matris med en undertriangulär?

(b) Visa att varje 2×2-matris $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ kan skrivas som en unik produkt $A = LU$, där

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{pmatrix} \text{ och } U = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & v \end{pmatrix}.$$

Bestäm L och U uttryckt i a, b, c och d.

(c) Visa att motsvarande resultat också gäller för varje 3×3-matris.

Datorövningar

1. För att rita en kurva i Matlab använder man sig lämpligen av en parametrisering av kurvan. Det första man behöver då är en parameter t. Matlab gillar inte att man säger t ex "Låt t vara intervallet mellan 0 och 2π", utan man får nöja sig med ett antal punkter i $[0, \pi]$.

   (a) Kolla vad kommandona $t = (0 : 10)$ och $t = (0 : 0.2 : Pi)$ ger.

   (b) Vad händer om du t ex tar $\cos t$ där t är en vektor. (Detta är en finess i Matlab som är ett uttryck av att Matlab hela tiden tänker vektorer och matriser.) Utnyttja detta för att plotta funktionerna cos, tan, arctan och exp (Vad är den sista?) i intervallet $[0, 10]$ med kommandot PLOT.

   (c) Använde de parametriseringar vi fann tidigare för att plotta en cirkel, en ellips och kurvan $x^4 + y^4 = r^2$.

   (d) Plotta en cirkel med centrum i origo och plotta sedan bilden av denna efter att den linjära avbildningen $A = \left(\begin{smallmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ (för några olika k) har 'deformerat' den.

2. Lös uppgift 2.57b i boken. Vad är fördelningen efter 1, 10, 100, 1000 år? (Vi gör antagandet att flyttningsmönstret är oförändrat hela tiden, vilket givetvis är totalt befängt i perspektivet 1000 år.)

3. Lös uppgift 2.64 i boken praktiskt och teoretiskt (använd en av teoriövningarna ni gjorde innan). Kommentar, slutsats? Spelar det absolut ingen roll hur man sätter parenteserna?