Vektorprodukt

Vi såg senast att absolutbeloppet av determinanten gav areaförändringen för en linjär avbildning i planet. Speciellt såg vi (även om vi formulerade det lite annorlunda) att arean av den parallellogram som spändes upp av vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ var $|\det\begin{pmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{v}\end{pmatrix}|$. Man kan också uttrycka denna area som

$$|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\alpha,$$

där α är minsta vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Detta kan man se genom att observera att om $\mathbf{u}$ utgör basen så är höjden i parallellogrammen inget annat än $|\mathbf{v}|\sin\alpha$.

Definition 1 *En vektortrippel* $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ *i rummet säges vara* **högerorienterad** *om vyn från* $\mathbf{w}$*:s spets ger att minsta vridningen från* $\mathbf{u}$ *till* $\mathbf{v}$ *är moturs (positiv). Om det är tvärtom så säges den vara* **vänsterorienterad**.

Ett annat sätt att säga detta är att tummen, pekfingret och långfingret på höger hand (i den ordningen) utgör ett högerorienterat system (om långfingret pekar uppåt) och motsvarande på vänsterhanden utgör ett vänsterorienterat system.
Vi ska nu definiera en produkt mellan vektorer i rummet. Observera att detta är en operator på vektorerna i rummet och alltså ger en vektor (till skillnad från skalärprodukten). Notera också att den inte är definierad i planet.

Definition 2 *Låt* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *vara två vektorer i rummet och låt* α *vara minsta vinkeln mellan dem. Vi defierar då* **vektorprodukten**, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, *mellan* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *som den unika vektor som uppfyller:*

1. *om* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *är parallella så är* $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.
2. $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\alpha$, *d v s lika med arean av parallellogrammen som* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *spänner upp.*
3. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *är ortogonal mot både* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$.
4. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v})$ *utgör ett högersystem.*

Det står i definitionen "den unika vektor som uppfyller" så att det krävs ett argument för att visa att definitionen är korrekt. Det andra villkoret bestämmer ju längden på $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Det tredje villkoret ger att den är en normal till planet som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Detta ger två möjligheter: 'uppåt' eller 'nedåt'. Denna tvetydighet tas om hand av det sista villkoret och därmed är också riktningen unikt bestämd och därmed är vektorn unikt bestämd.

Exempel 1 *Låt* $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ *vara en högerorienterad ON-bas (om vi inte säger annat så kommer en bas alltid att antas vara högerorienterad). Vi har att* $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z$ *eftersom arean av parallellogrammen som spänns upp av* $\mathbf{e}_x$ *och* $\mathbf{e}_y$ *är* 1 *och därmed lika med* $|\mathbf{e}_z|$ *och dessutom per definition av* $\mathbf{e}_z$ *så är* $\mathbf{e}_z$ *ortogonal mot båda de andra basvektorerna och* $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ *är högerorienterad enligt antagandet.*

Sats 1 *Låt* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *och* $\mathbf{w}$ *vara tre vektorer i rummet. De uppfyller:*

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$.
2. $(c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}),\ c \in \mathbb{R}$.
3. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$.

Av dessa är de två första enkla, medan den tredje har ett icke-trivialt bevis som till stora delar finns i boken. Vi ska nu utnyttja dessa regler för att ge en mycket användbar formel i koordinatform för vektorprodukten så att man lätt kan räkna ut den för godtyckliga vektorer.

Sats 2 *Låt* $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix}^t$ *och* $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}^t$ *i en (högerorienterad) ON-bas. Då gäller att*

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\ &= (y_1 z_2 - y_2 z_1)\mathbf{e}_x - (x_1 z_2 - x_2 z_1)\mathbf{e}_y + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\mathbf{e}_z \\ &= \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ -x_1 z_2 + x_2 z_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Anmärkning 1 *Determinanten i satsen ska enbart ses som en formell determinant som kan användas som minnesregel, eftersom elementen i första raden är vektorer och ej tal.*

Bevis. Genom att göra samma resonemang som i exemplet ovan för övriga kombinationer av basvektorerna så får vi:

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z,\ \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_z \\ &\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y,\ \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_y \\ &\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x,\ \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_x \\ &\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = \mathbf{0},\ \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y = \mathbf{0},\ \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Om man använder detta och räknereglerna ovan så får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (x_1\mathbf{e}_x + y_1\mathbf{e}_y + z_1\mathbf{e}_z) \times (x_2\mathbf{e}_x + y_2\mathbf{e}_y + z_2\mathbf{e}_z) \\ &= (y_1 z_2 - y_2 z_1)\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z - (x_1 z_2 - x_2 z_1)\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y \\ &= (y_1 z_2 - y_2 z_1)\mathbf{e}_x - (x_1 z_2 - x_2 z_1)\mathbf{e}_y + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

$\square$

Exempel 2 *Bestäm en vektor som är vinkelrät mot både* $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^t$ *och* $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}^t$. *Per definition är* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *ortogonal mot både* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$. *Vi beräknar* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *med hjälpa av satsen och får*

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 - 4 \cdot 1 \\ -2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

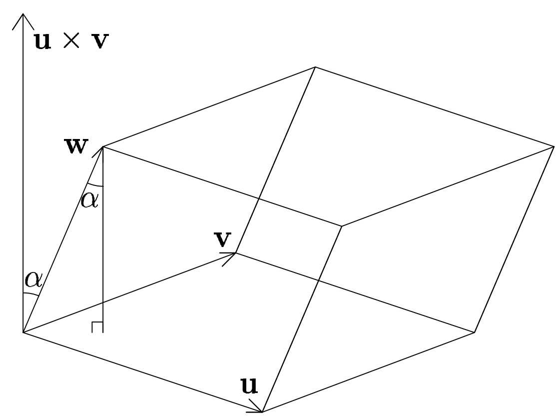
Vi ska nu bland annat visa att determinanten för en 3×3-matris verkligen ger volymförändringen. Först observerar vi att om $M = \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{pmatrix}$ så avbildar M enhetskuben på den parallellepiped som spänns av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. Alltså ger volymen av parallellepipeden som spänns av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ den volymförändring som den linjära avbildningen given av M ger. Formlerna för skalär- och vektorprodukt i koordinatform ger att

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{w} & \mathbf{u} & \mathbf{v} \end{pmatrix}^t = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}.$$

Den första likheten fås genom att transponera (som inte ändrar determinanten) och sedan göra två radbyten som byter tecken två gånger och därmed inte heller ändrar determinanten. Den andra likheten fås från formlerna. (Man byter ut basvektorerna $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ mot $\mathbf{w}$:s koordinater i den formella determinanten.)

Vi ska nu beräkna volymen V av parallellepipeden som spänna av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. Antag först att $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ är ett högerorienterat system. Om α är vinkeln mellan $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ så får vi (se figur)

$$V = \text{basytan} \times \text{höjden} = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}||\mathbf{w}| \cos \alpha = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}.$$



Detta var precis vad vi ville visa. Vi antog dock att vi hade ett högerorienterat system. Om istället $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ är vänsterorienterat så observera att $(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w})$ är högerorienterat och vi får att

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (-\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} = -V,$$

enligt beräkningen för högerorienterade system ovan. Vi får alltså till slut att

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{cases} V, & \text{om } (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \text{ är högerorienterad,} \\ -V, & \text{om } (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \text{ är vänsterorienterad,} \end{cases}$$

där V är parallellepipeden som spänns av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$.

Linjer

En linje i planet som inte är lodrät kan skrivas på formen $y = kx + m$ där $k, m \in \mathbb{R}$. En lodrät linje har ekvationen $x = n$ för något $n \in \mathbb{R}$. För att slippa olika typer av ekvationer kan man skriva båda fallen som

$$Ax + By + C = 0,$$

där $y = kx + m$ t ex svarar mot $A = k$, $B = -1$ och $C = m$ och $x = n$ t ex svarar mot $A = 1$, $B = 0$ och $C = -n$. Omvänt så är de punkter i planet som satisfierar $Ax + By + C = 0$ en rät linje.
Ett annat sätt att beskriva en linje är med hjälp av en punkt $P = (x_0, y_0)$ på linjen och en riktningsvektor $\mathbf{v} = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$ för linjen, d v s en vektor som är parallell med linjen. Om $R = (x, y)$ är en godtycklig punkt på linjen så är $\overrightarrow{PR} = t\mathbf{v}$ för något $t \in \mathbb{R}$. I koordinatform blir detta

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tv_1 \\ tv_2 \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2. \end{cases}$$

Detta brukar kallas **linjens ekvation på parameterform**.
Antag nu att vi har en linje given av $Ax + By + C = 0$. En riktningsvektor ges av $\overrightarrow{P_0P_1}$ där P_0 och P_1 är godtyckliga punkter på linjen och från detta får man linjens ekvation på parameterform. Ett annat sätt är att helt enkelt sätta $x = t$ (om $B \neq 0$, annars $y = t$) och sedan lösa ut $y = (1/B)(-At - C)$, d v s

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -C/B \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -A/B \end{pmatrix}.$$

Härifrån ser vi att $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -A/B \end{smallmatrix}\right) = (1/B)\left(\begin{smallmatrix} B \\ -A \end{smallmatrix}\right)$ är en riktningsvektor. Om vi istället sätter $y = t$ (antar $A \neq 0$) så får vi $x = (1/A)(-Bt - C)$, d v s

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C/A \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -B/A \\ 1 \end{pmatrix}.$$

I det här fallet får vi att $\left(\begin{smallmatrix} -B/A \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = (-1/A)\left(\begin{smallmatrix} B \\ -A \end{smallmatrix}\right)$ är en riktningsvektor. I båda fallen får vi alltså att $\left(\begin{smallmatrix} B \\ -A \end{smallmatrix}\right)$ är en riktningsvektor.
Observera också att $\mathbf{n} = \left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}\right)$ är ortogonal mot riktningsvektorn $\left(\begin{smallmatrix} B \\ -A \end{smallmatrix}\right)$ och alltså är $\mathbf{n} = \left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}\right)$ en så kallad **normalvektor** till linjen $Ax + By + C = 0$.
På motsvarande sätt ges ekvationen på parameterform för en linje i rummet av

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP_0} + t\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

där $P = (x_0, y_0, z_0)$ är en punkt på linjen och $\mathbf{v}$ en riktningsvektor.

Plan

Låt π vara ett plan i rummet och antag att $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} A & B & C \end{pmatrix}^t$ är en normalvektor till planet, d v s $\mathbf{n}$ är ortogonal mot varje vektor som är parallell med planet. Om $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ är en fix punkt i planet och $P = (x, y, z)$ en godtycklig punkt i planet, så gäller alltså att

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \\ &= A(x - x_0) + B(x - x_0) + C(z - z_0) \\ &= Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0). \end{aligned}$$

Observera att P_0 antogs vara en fix punkt så att x_0, y_0 och z_0 är några fixa tal så att $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ är ett bestämt tal. Vi får alltså att

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

är ekvationen för ett plan med normalvektorn $\begin{pmatrix} A & B & C \end{pmatrix}^t$. Notera analogin med ekvationen för en linje i planet.

Exempel 3 *Bestäm ekvationen för planet som går genom punkten* $(1,2,3)$ *och som har* $(4,5,6)$ *som normalvektor. Vi såg ovan att ekvationen är på formen* $4x+5y+6z+D=0$ *för något* D. *Man bestämmer enklast* D *genom att utnyttja att* $(1,2,3)$ *ligger på planet så att*

$$0 = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + D = 32 + D,$$

så att $D = -32$ *och ekvationen är* $4x + 5y + 6z - 32 = 0$.

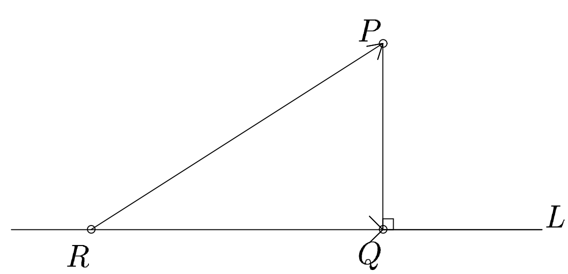
Låt $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$ vara två ickeparallella vektorer som är parallella med ett plan. Då är varje vektor $\mathbf{w}$ som är parallell med planet en linjärkombination av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$. Så om $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ är en fix punkt i planet och $P = (x, y, z)$ är en godtycklig punkt i planet så gäller att $\overrightarrow{P_0P} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ för några $s, t \in \mathbb{R}$. I koordinatform blir detta

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sx_1 + tx_2 \\ sy_1 + ty_2 \\ sz_1 + tz_2 \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} x = x_0 + sx_1 + tx_2 \\ y = y_0 + sy_1 + ty_2 \\ z = z_0 + sz_1 + tz_2. \end{cases}$$

Detta brukar kallas **planets ekvation på parameterform**.

Avstånd

Först ska vi ge en metod för att beräkna (minsta) avståndet d från en punkt P till en rät linje L. Avståndet ges ju av avståndet mellan P och den punkt Q på L som är sådan att $\overrightarrow{PQ}$ är ortogonal mot L. Det gäller alltså att bestämma Q, eller i varje fall $|\overrightarrow{PQ}|$.



Låt R vara en fix punkt på L, vilken som helst. Då är triangeln PQR rätvinklig och $\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RP}_L$, dvs $\overrightarrow{RP}$:s ortogonala projektion på L. Med hjälp av Pythagoras sats får man då

$$d = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{|\overrightarrow{RP}|^2 - |\overrightarrow{RQ}|^2} = \sqrt{|\overrightarrow{RP}|^2 - |\overrightarrow{RP}_L|^2}.$$

Anmärkning 2 *Observera att denna metod fungerar både i två och tre dimensioner. Notera också att valet av punkten R inte påverkar resultatet.*

Exempel 4 *Vad är avståndet d mellan punkten $P = (1, 2, 3)$ och linjen L given av*

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 5 + 2t \\ z = 6 + 3t \end{cases}$$

Låt t ex $R = (4, 5, 6) \in L$. Vi har att $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ är en riktningvektor för L och en enhetsvektor parallell med $\mathbf{v}$ ges av

$$\mathbf{e} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Vi får därmed om $\overrightarrow{RQ}$ är den ortogonala projektionen av $\overrightarrow{RP}$ på L att

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{RP}\right| &= \left|\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}\right| = 3\sqrt{3}.\\
\left|\overrightarrow{RQ}\right| &= \left|\overrightarrow{RP}_L\right| = \left|(\overrightarrow{RP}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e}\right| = \left|\overrightarrow{RP}\cdot\mathbf{e}\right||\mathbf{e}| = \left|\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right| = \frac{18}{\sqrt{14}}.\\
d &= \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{RP}\right|^2 - \left|\overrightarrow{RQ}\right|^2} = \sqrt{27 - \frac{18^2}{14}} = \sqrt{\frac{27(7-6)}{7}} = 3\sqrt{\frac{3}{7}}.
\end{aligned}$$

Vi ska nu angripa problemet att beräkna avståndet d mellan en punkt $P = (x, y, z)$ och ett plan π i rummet. Antag att ekvationen för planet är given av $Ax + By + Cz + D = 0$. Då är

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}$$

en normalvektor till π av längd 1. Låt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ vara en godtycklig punkt i planet. Avståndet från P till π ges då av längden av den ortogonala projektionen av $\overrightarrow{P_0P}$ på normalen till planet. Vi får alltså att

$$\begin{aligned}
d &= |(\mathbf{e}\cdot\overrightarrow{P_0P})\mathbf{e}| = |\mathbf{e}\cdot\overrightarrow{P_0P}| = \left|\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\\z-z_0\end{pmatrix}\right|\\
&= \frac{|Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\\
&= \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},
\end{aligned}$$

där den sista likheten följer av P_0 ligger i planet och alltså är $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Till slut påpekar vi att man bör försöka förstå hur man kommer fram till de olika formlerna för avstånden istället för att försöka memorera dem.