Relationer

Teoriövningar

1. Denna uppgift handlar om partiella ordningar.

   (a) Låt $S_N = \{d \in \mathbb{Z}^+ : \ d \mid N\}$, där $N \in \mathbb{Z}$ och $N \geq 2$. Undersök S_N för $N = 6, 7, 8, 12, 30, 74$. Vad är det som avgör om S_N är en stor eller liten mängd? Vad är det minsta respektive största antal element som S_N kan innehålla? För vilka N blir S_N minst?

   (b) Antag nu att vi vill ordna mängden S_N på något sätt. Det finns ett mycket traditionellt sätt att göra detta på, nämligen med '$\leq$'. Man kan uttrycka det med hjälp av relationsbegreppet genom att definiera relationen R_1 på S_N som:

   $$aR_1b \iff a \leq b.$$

   Rita Hasse-diagrammet för R_1 då $N = 7, 12, 30$.

   (c) Ett sätt att *delvis ordna* S_N är att ersätta "$a \leq b$" med "$a|b$," d v s a delar b. Vi inför alltså relationen R_2 definierad som:

   $$aR_2b \iff a \mid b.$$

   Motivera att detta är en partiell ordning på S_N. Rita Hasse-diagrammet för R_2 då $N = 7, 12, 30$. Relationen R_2 ger upphov till en ordning av elementen i S_N. Kan man här alltid avgöra vilket av två givna element som "kommer först" i denna ordning? (Det är inte alltid man kan (eller vill) avgöra vilket av två element i en mängd som är 'störst' (bäst eller vackrast).)

   (d) För vilka N är R_1 respektive R_2 en total ordning.

2. Denna uppgift handlar om ekvivalensrelationer.

   (a) Antag att vi vill arbeta med rationella tal och kunna räkna exakt. Detta kan vi t ex göra genom att betrakta ett rationellt tal $\frac{a}{b}$ som ett ordnat par, (a, b), av heltal där $b \neq 0$. Det finns dock flera saker att tänka på, bl a: Finns det flera par som representerar samma rationella tal? Detta ger upphov till en relation på $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Skriv ner den. Vilka relationsegenskaper uppfyller den? Detta ger en partition av $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, på vilket sätt? Man kan nu tänka sig (Försök!) de rationella talen som $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ med er fina ekvivalensrelation.

   (b) Definiera addition och multiplikation på (ekvivalensklasserna av) talparen i $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ så att dessa stämmer överens med addition och multiplikation av rationella tal så som 'det brukar vara'. (Tala alltså om vad $(p, q) + (r, s)$ och $(p, q) \cdot (r, s)$ ska vara) Försök sedan visa att dessa är väldefinierade, d v s att det inte spelar någon roll vilken representant i ekvivalensklasserna för (p, q) resp. (r, s) som vi väljer.

(c) Visa att multiplikationen i förra uppgiften är associativ och att distributiva lagen gäller. Här får ni enbart utnyttja de räkneregler vi känner för heltalen.

3. Man kan representera en relation som en graf. Hur kan man från denna graf avgöra om relationen är reflexiv, symmetrisk, antisymmetrisk respektive transitiv.

4. Ett annat sätt att representera en relation är med hjälp av en boolsk matris, som är en matris med bara ettor och nollor. Om vi har en relation $\mathcal{R}$ på en ändlig mängd $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ så bildar man dess matris M_A genom att låta element (i, j) vara 1 om $a_i \mathcal{R} a_j$ och 0 annars. Hur kan man i matrisen se om relationen är reflexiv, symmetrisk respektive antisymmetrisk? Transitiviteten är lite svårare, men man kan använda M_A^2. Vad betyder en etta i M_A^2? Hur kan man använda detta till att avgöra om relationen är transitiv?

Datorövningar

1. Skapa funktioner som givet en kvadratisk boolsk matris avgör huruvida motsvarande relation är reflexiv, symmetrisk, antisymmetrisk respektive transitiv. (Funktioner ni kan ha användning för är bl a TRACE och SIZE.)

2. Testa era funktioner på slumpmässiga boolska matriser. Gör det för ett stort antal 3×3-matriser och kolla hur stor andel av dessa som har de olika egenskaperna. Vad får ni för 'empiriska sannolikheter' för de olika egenskaperna? Beräkna de teoretiska sannolikheterna. (Hur kan man göra detta med Matlab? För transitiviteten är det nog klokt att ta till Matlab.) Gör om det för 4×4-matriser.