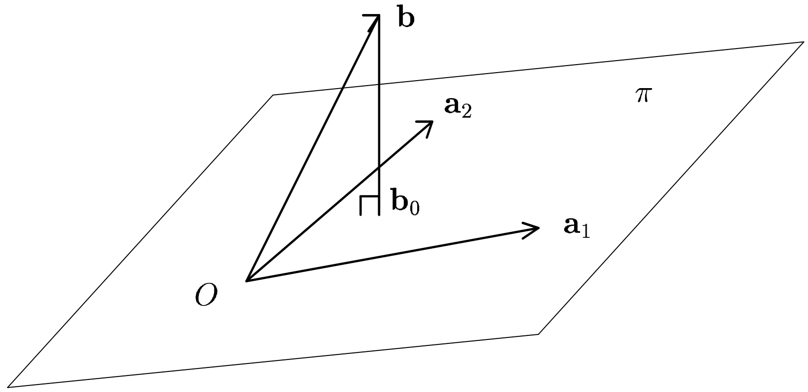
Överbestämda ekvationssystem

Antag att vi har 3 ekvationer och 2 obekanta, så $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där $A = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2)$ är en 3×2-matris. Då är

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2$$

en linjärkombination av kolonnerna i $\mathbf{a}_1$ och $\mathbf{a}_2$ i A. Så $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har lösning om och endast om $\mathbf{b}$ är en linjärkombination av kolonnerna i A. Alla linjärkombinationer av $\mathbf{a}_1$ och $\mathbf{a}_2$ är ett plan π i $\mathbb{R}^3$.



Antag nu att vi har en vektor $\mathbf{b}$ som inte ligger i planet π och låt $\mathbf{b}_0$ vara ortogonala projektionen av $\mathbf{b}$ på π. Då är en vektor $\mathbf{x}_0$ sådan att $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_0$ så nära en lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ man komma i den meningen att

$$|A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}| \leq |A\mathbf{x} - \mathbf{b}|$$

för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.
Hur bestämmer man $\mathbf{x}_0$? Sätt $\mathbf{r} = A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}$. Då är $\mathbf{r}$ ortogonal mot varje vektor i π och speciellt mot $\mathbf{a}_1$ och $\mathbf{a}_2$. Det ger

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1^t\mathbf{r} = 0 \\ \mathbf{a}_2^t\mathbf{r} = 0 \end{cases} \quad \text{d v s } A^t\mathbf{r} = \mathbf{0}.$$

Men

$$0 = A^t\mathbf{r} = A^t(A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}) = A^tA\mathbf{x}_0 - A^t\mathbf{b},$$

d v s $A^tA\mathbf{x}_0 = A^t\mathbf{b}$, så $\mathbf{x}_0$ är en lösning till $A^tA\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$.
Detta kan (ganska enkelt) bevisas i det allmänna fallet (se boken) och vi har:

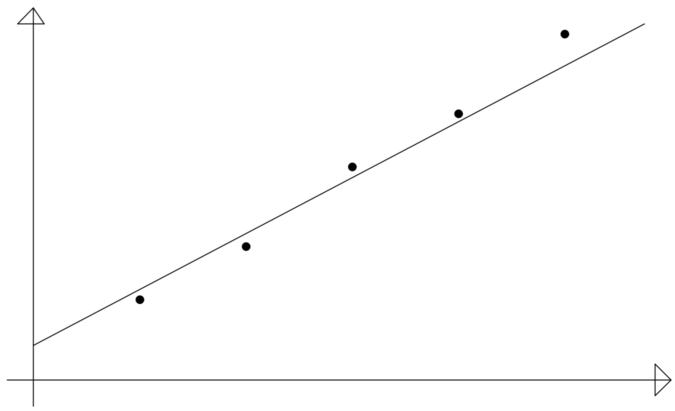
Sats 1 *Residualvektorn* $\mathbf{r} = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$ *blir minimal om* $\mathbf{x}$ *satisfierar (normalekvationen)* $A^tA\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$.

Anmärkning 1 *Denna 'lösning' kallas för en minstakvadratlösning.*

Exempel 1 *Typexempel på ett överbestämt system är när man har en mängd data som man vill anpassa till någon typ av funktion så bra som möjligt. Antag att vi har mätdata*

x	1	2	3	4	5
y	3	5	8	10	13

och så vill vi hitta en rät linje $y = kx + m$ *som stämmer överens 'så bra som möjligt' med dessa data.*



Vi får ett ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *med 5 ekvationer och 2 obekanta:*

$$\begin{cases} 3 = 1k + m \\ 5 = 2k + m \\ 8 = 3k + m \\ 10 = 4k + m \\ 13 = 5k + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Vi bestämmer normalekvationen $A^tA\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$ *och får*

$$A^tA = \begin{pmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{pmatrix} \text{ och } A^t\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 142 \\ 39 \end{pmatrix}.$$

Löser vi denna så får vi lösningen $(5/2\ 13/10)^t$, *d v s* $k = 5/2$ *och* $m = 13/10$ *som är linjen som är ritad i bilden.*

Egenvärden och egenvektorer

Definition 1 *Antag att* A *är en* $n \times n$*-matris. En* n*-vektor* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ *som är sådan att* A *verkar som multiplikation med ett tal* λ *på* $\mathbf{v}$, *d v s*

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},\ \lambda \in \mathbb{R},$$

kallas för en **egenvektor** *till* A. *Talet* λ *kallas för ett* **egenvärde** *till* A.

Exempel 2

1. *Låt* $A = s \cdot I$ *vara matrisen som skalar med talet* s. *Då är alla vektorer egenvektorer med egenvärdet* s.

2. *Låt* $A = \left(\begin{smallmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{smallmatrix}\right)$ *vara rotation kring origo vinkeln* t *moturs. Om* $t \notin \{0, \pi\}$ *så saknar* A *egenvektorer, ty då är aldrig* $\mathbf{v}$ *och* $A\mathbf{v}$ *parallella.*

3. *Låt A vara projektionen i $\mathbb{R}^3$ på xy-planet, d v s*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Då gäller att

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

så $(0\ 0\ 1)^t$ är en egenvektor med egenvärdet 0. Om $\mathbf{v} = (x\ y\ 0)^t$ är en vektor i xy-planet så är $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$ så alla dessa är egenvektorer med egenvärdet 1. För alla andra vektorer är $\mathbf{v}$ och $A\mathbf{v}$ ej parallella så dessa är de enda egenvektorerna.

Hur kan man beräkna egenvärde och egenvektorer när man inte har enkla fall då man kan lösa det geometriskt? Följande metod fungerar i princip, men i praktiken endast för små matriser. Vi har

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$$

så $(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$ har alltså en icke-trivial lösning. Detta är ekvivalent med att

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

(Vi måste ha minst en nollrad efter Gauss-elimination.) Ekvationen med determinanten kallas för den **karakteristiska ekvationen** och är en polynomekvation av grad n.

Exempel 3 *Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen*

$$A = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Den karakteristiska ekvationen blir

$$\begin{aligned} 0 &= |A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} 3/4 - \lambda & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 - \lambda \end{vmatrix} = (3/4 - \lambda)^2 - 1/16 \end{aligned}$$

vilket är ekvivalent med

$$(3/4 - \lambda)^2 = 1/16 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Egenvektorerna är lösningar till $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ för $\lambda = 1$ och $\lambda = 1/2$.
$\lambda = 1$:

$$(A - 1 \cdot I) = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi får $\mathbf{x} = \binom{t}{t}$, *så t ex* $\mathbf{x} = \binom{1}{1}$ *är en egenvektor till egenvärdet* 1.
$\lambda = 1/2$:

$$(A - \frac{1}{2} \cdot I) = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi får $\mathbf{x} = \binom{t}{-t}$, *så t ex* $\mathbf{x} = \binom{1}{-1}$ *är en egenvektor till egenvärdet* 1/2.

Vi såg i exemplen ovan att antalet egenvärden till en matris kan variera. Eftersom karakteristiska ekvationen för en $n \times n$-matris är ett polynom av grad n så kan det ha allt från 0 till n (reella) egenvärden. Vad som är viktigare än antalet egenvärden är antalet linjärt oberoende egenvektorer. Vi såg t ex att en skalningsmatris $A = s \cdot I$ bara hade ett egenvärde s, men att alla vektorer var egenvektorer så att den har n linjärt oberoende egenvektorer. Dessa kan dessutom väljas så stt de blir ortogonala. Detta är sant för symmetriska matriser i allmänhet och vi har följande så kallade spektralsats för symmetriska matriser.

Sats 2 *Antag att A är en $n \times n$-matris. Då har A n stycken ortogonala egenvektorer om och endast om A är symmetrisk.*

För icke-symmetriska matriser kan i stort sett vad som helst inträffa. Man vet dock att antalet linjärt oberoende egenvektorer inte är mindre än antalet olika egenvärden:

Sats 3 *Egenvektorer till olika egenevärden är linjärt oberoende.*

Ett viktigt resultat får man av följande enkla räkningar där vi utnyttjar att multiplikation av tal med matris är kommutativ. Antag att $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, där $\lambda \in \mathbb{R}$. Då gäller

$$\begin{aligned} A^2\mathbf{v} &= A(A\mathbf{v}) = A(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(A\mathbf{v}) = \lambda \cdot \lambda\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v} \\ \mathbf{v} &= (A^{-1}A)\mathbf{v} = A^{-1}(A\mathbf{v}) = A^{-1}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(A^{-1}\mathbf{v}), \end{aligned}$$

så $A^{-1}\mathbf{v} = (1/\lambda)\mathbf{v}$. Med hjälp av en enkel induktion så generaliserar vi detta till:

Sats 4 *Antag att $\mathbf{v}$ är en egenvektor till A med egenvärdet λ, d v s $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Då gäller att $\mathbf{v}$ är en egenvektor till A^m för alla $m \in \mathbb{Z}$ med egenvärdet λ^m, d v s*

$$A^m\mathbf{v} = \lambda^m\mathbf{v}.$$

Denna sats kan man bl a använda till att avgöra vad som händer med A^n när $n \to \infty$ och den ger också en grund för numeriska metoder att beräkna egenvärden.