Relationer

Det matematiska begreppet relation är en formalisering av det som vi i dagligt tal kallar för en relation. Men det är ett vitt begrepp som också innefattar mycket som inte direkt kan ses som någon 'naturlig' relation.

Definition 1 *Låt A och B vara två mängder. En* **relation $\mathcal{R}$ från** *A* **till** *B är en delmängd*

$$\mathcal{R} \subseteq A \times B.$$

Om $A = B$ så säger vi att $\mathcal{R}$ är en **relation på** *A.*

Anmärkning 1 *Istället för att skriva $(a, b) \in \mathcal{R}$ så skriver man ofta kortare $a\mathcal{R}b$.*

Exempel 1

1. *Låt $A = \{1, 2, 3\}$. Då är*

   $$\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2)\} \subseteq A \times A$$

   en relation på A.

2. *Låt $A = \mathbb{R}$. Då är*

   $$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$$

   en relation på $\mathbb{R}$. Här säger man ofta att '$\leq$' är en relation på $\mathbb{R}$.

3. *Låt $A = \mathbb{Z}$ och låt n vara ett fixt positivt heltal. Då är*

   $$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x \equiv y \pmod{n}\}$$

   en relation på $\mathbb{Z}$.

4. *Antag att $f : A \longrightarrow B$ är en funktion. Då är grafen av f,*

   $$graf(f) = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\},$$

   en relation från A till B. Vi ser här speciellt att begreppet relation kan ses som en generalisering av begreppet funktion.

5. *Antag att A är mängden av alla människor på jorden. Vi definierar då en relation, $\mathcal{R}$, på A genom att säga att $a\mathcal{R}b$ om a är bror till b.*

Precis som man kan sätta samman funktioner kan man också sätta samman relationer.

Definition 2 *Låt $\mathcal{R}$ vara en relation från A till B och $\mathcal{S}$ en relation från B till C. Då definierar vi* **sammansättningen** *av $\mathcal{S}$ och $\mathcal{R}$ som*

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(a, c) \in A \times C : \exists b \in B \text{ sådant att } (a, b) \in \mathcal{R} \text{ och } (b, c) \in \mathcal{S}\}.$$

Observera ordningen mellan $\mathcal{R}$ och $\mathcal{S}$. Det är vanligt i litteraturen att man har omvänd ordning. Här följer vi boken och fördelen med denna ordning är att det blir samma som för funktioner:

Exempel 2 *1. Låt $f : A \longrightarrow B$ och $g : B \longrightarrow C$ vara två funktioner. Då blir sammansättningen av graferna (betraktade som relationer)*

$$\begin{aligned} graf(g) \circ graf(f) &= \{(a,c) \in A \times C : \exists b \in B \; c = g(b),\, b = f(a)\} \\ &= \{(a,c) \in A \times C : c = g(f(a))\} = graf(g \circ f) \end{aligned}$$

grafen av sammansättningen av funktionerna.

2. Låt $A = \{1, 2, 3\}$ och $\mathcal{R} = \{(1,2),(2,3),(3,2)\}$ som ovan. Då är

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \{(1,3),(2,2),(3,3)\}.$$

Vi ska nu definiera några viktiga egenskaper som relationer på en mängd kan ha. De flesta viktiga relationer har en eller flera av dessa egenskaper.

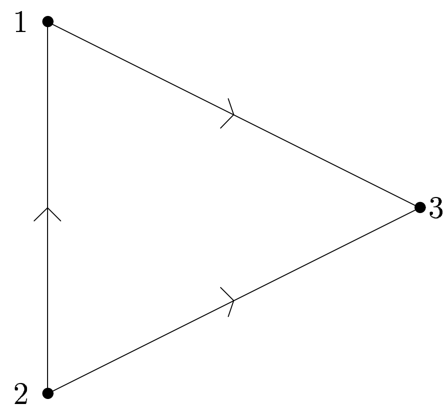
Definition 3 *Låt $\mathcal{R}$ vara en relation på A. Vi säger att $\mathcal{R}$ är*

- **reflexiv** *om $(a,a) \in \mathcal{R}$ för alla $a \in A$.*
- **symmetrisk** *om $(a,b) \in \mathcal{R}$ medför $(b,a) \in \mathcal{R}$ för alla $a, b \in A$.*
- **antisymmetrisk** *om $(a,b) \in \mathcal{R}$ och $(b,a) \in \mathcal{R}$ medför $a = b$ för alla $a, b \in A$.*
- **transitiv** *om $(a,b) \in \mathcal{R}$ och $(b,c) \in \mathcal{R}$ medför $(a,c) \in \mathcal{R}$ för alla $a, b, c \in A$.*

Exempel 3 *1. Vi betraktar relationen '$\leq$' på $\mathbb{R}$. Denna är reflexiv, ty $x \leq x$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Den är ej symmetrisk, ty t ex $1 \leq 2$ men $2 \not\leq 1$. Däremot är den antisymmetrisk, ty om $x \leq y$ och $y \leq x$ så måste $x = y$. Till slut måste den vara transitiv, eftersom om $x \leq y$ och $y \leq z$ så är $x \leq z$.*

2. Betrakta nu relationen kongruens modulo n på $\mathbb{Z}$. Denna är reflexiv, ty $d \equiv d \pmod{n}$ för alla $d \in \mathbb{Z}$. Den är symmetrisk, ty om $m \equiv d \pmod{n}$ så är $d \equiv m \pmod{n}$. Däremot är den inte antisymmetrisk, ty t ex $n \equiv 0 \pmod{n}$ och $0 \equiv n \pmod{n}$ men $n \neq 0$. Till slut måste den vara transitiv, eftersom om $d \equiv m \pmod{n}$ och $m \equiv z \pmod{n}$ så är $d \equiv z \pmod{n}$. Alla dessa egenskaper har ni redan använt i första kursen.

Om man har en relation på en relativt liten mängd så kan man åskådliggöra den genom att rita en riktad graf. Denna har elementen i mängden som noder och det finns en kant från a till b om och endast om a är relaterad till b. Så att t ex relationen $\mathcal{R} = \{(2,1),(2,3),(1,3)\}$ på $A = \{1, 2, 3\}$ har följande graf.



Partiella ordningar

Vi ska nu definiera en viktig klass av relationer som formaliserar begreppet att ha en ordning på saker och ting.

Definition 4 *En relation på en mängd A säges vara en* **partiell ordning** *på A om den är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv.*

Exempel 4

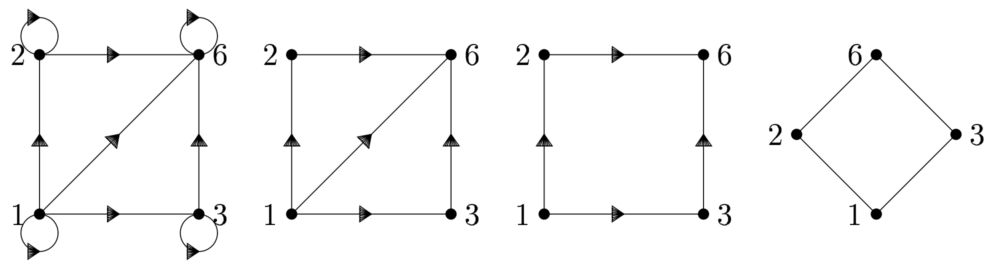
1. *Vi såg innan att '$\leq$' hade alla dessa tre egenskaper och alltså är den en partiell ordning på $\mathbb{R}$ (och även på $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, o s v).*

2. *Låt M vara en mängd och $\mathcal{P}(M)$ potensmängden av M. Då är '$\subseteq$' en partiell ordning på $\mathcal{P}(M)$, ty den är reflexiv eftersom $B \subseteq B$ för alla mängder B, antisymmetrisk eftersom $A \subseteq B$ och $B \subseteq A$ medför $A = B$ per definition och transitiv eftersom $A \subseteq B$ och $B \subseteq C$ medför att $A \subseteq C$.*

En viktig skillnad mellan '$\leq$' och '$\subseteq$' är att för '$\leq$' gäller att antingen är $a \leq b$ eller $b \leq a$ (eller både och), medan för '$\subseteq$' behöver detta ej vara sant. Tag t ex de två mängderna $\{a\}$ och $\{b\}$ där $a \neq b$. Då är $\{a\} \not\subseteq \{b\}$ och $\{b\} \not\subseteq \{a\}$. En partiell ordning som har egenskapen att antingen är a relaterad till b eller tvärtom för godtyckliga element a och b säges vara en **total ordning**.

För att illustrera en partiell ordning kan man använda sig av det så kallade **Hasse-diagrammet**. Detta är inget annat än en förenkling av grafen av relationen genom att man utnyttjar att man vet att den är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv. I kort så förenklar man på följande sätt. Eftersom den är reflexiv så vet man att det är öglor i alla noder så dessa plockas bort. Eftersom den är transitiv så kan man plocka bort en pil mellan a och c om det finns b sådant att det finns pil från a till b och b till c. Till slut kan man utnyttja att den är antisymmetrisk (och transitiv) och ta bort pilarna genom att att låta alla pilar peka uppåt i grafen.

Vi illustrerar metoden på följande exempel. Låt $M = \{1, 2, 3, 6\}$ och betrakta relationen att a relaterat till b om och endast om $a|b$. Det är en lätt övning att visa att detta är en partiell ordning på M. Förenklingen till Hasse-diagrammet går till så här:



För att skapa Hasse-diagrammet från en given partiell ordning är det dock enklare att använda följande algoritm. Leta upp alla minimala element, d v s sådana som inte är 'större' än något annat. Observera att det kan finnas flera sådana element. Sätt dessa i nedersta raden och ta ut dem från mängden. Ta nu de minimala i den mängd som är kvar och sätt dessa i en rad ovanför de tidigare. Dra en linje från första till andra raden mellan alla element som är relaterade. Upprepa nu detta tills alla element har placerats ut.

Ekvivalensrelationer

Den andra viktiga klassen av relationer vi ska titta på är ekvivalensrelationer som ger ett sätt att dela upp en mängd i olika klasser.

Definition 5 *En relation $\mathcal{R}$ på en mängd A är en* **ekvivalensrelation** *på A om den är reflexiv, symmetrisk och transitiv. Om $a \in A$ så är* **ekvivalensklassen** *av a:*

$$[a] = [a]_{\mathcal{R}} = \{b \in A : (a, b) \in \mathcal{R}\}.$$

Exempel 5

1. *Vi såg innan att kongruens modulo n hade alla dessa tre egenskaper och att den alltså är en ekvivalensrelation på $\mathbb{Z}$. Ekvivalensklassen av ett tal blir då helt enkelt alla tal som är kongruenta mot det talet, t ex*

$$[0]_n = \{0, \pm n, \pm 2n, \pm 3n, \dots\}.$$

2. *Betrakta relationen på alla människor där person A är relaterad till person B om de har samma föräldrar. Denna är då reflexiv, symmetrisk och transitiv mer eller mindre per definition och alltså en ekvivalensrelation. Ekvivalensklasserna utgörs då av de som har samma föräldrar.*

Vi vet sedan tidigare (första kursen) att varje heltal ligger i precis en av ekvivalensklasserna modulo n och att vi har en disjunkt (mängderna har inget gemensamt) union

$$\mathbb{Z} = [0]_n \cup [1]_n \cup \dots \cup [n-1]_n.$$

På samma sätt ger det andra exemplet en uppdelning av alla människor i disjunkta grupper där de som är i en grupp har samma föräldrar. En sådan uppdelning av en mängd som union av disjunkta mängder kallas för en **partition**.

Anmärkning 2 *Observera att partition syftar på hela uppdelningen, d v s hela mängden av delmängder. Detta skiljer sig från begreppet en partition av hårddisken som (felaktigt) betecknar en del av hårddisken och inte hela uppdelningen.*

Vi såg att våra exempel på ekvivalensrelationer gav upphov till en partition som bestod av ekvivalensklasserna. Detta är något som gäller i allmänhet liksom omvändningen att en partition ger en ekvivalensrelation.

Sats 1 *Ekvivalensklasserna utgör en partition av mängden och omvänt om man har en partition så får man naturligt en ekvivalensrelation med delmängderna i partitionen som ekvivalensklasser.*

Bevis. Antag först att vi har en ekvivalensrelation $\mathcal{R}$. Vi måste visa att ekvivalensklasserna utgör en partition. Ett element a tillhör alltid en klass nämligen $[a]$ eftersom relationen är reflexiv. Alltså är unionen av alla olika ekvivalensklasser hela mängden.
Återstår att visa att om $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ så är $[a] = [b]$. Antag att $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ och låt $c \in [a] \cap [b]$. Då gäller att $a\mathcal{R}c$ och $b\mathcal{R}c$ och då får vi från symmetri och transitivitet att $c\mathcal{R}b$ och $c\mathcal{R}a$ så $a\mathcal{R}b$ och $b\mathcal{R}a$.
Om vi nu tar godtyckligt $d \in [a]$ så får vi att $a\mathcal{R}d$. Därmed får vi också från symmetri och transitivitet och $a\mathcal{R}b$ att $d\mathcal{R}a$ och $d\mathcal{R}b$, d v s $d \in [b]$. Eftersom d var godtyckligt i $[a]$ så kan vi dra slutsatsen $[a] \subseteq [b]$. På samma sätt får man $[b] \subseteq [a]$ och alltså är $[a] = [b]$ och vi har visat att ekvivalensklasserna utgör en partition.
För omvändningen så antar vi att vi har en partition och definierar helt enkelt en relation genom att två element är relaterade om och endast om de ligger i samma delmängd i partitionen. Denna är uppenbarligen reflexiv och symmetrisk och transitiviteten följer av att delmängderna i partitionen är disjunkta. □

Vi har alltså visat att bergreppen ekvivalensrelation och partition är helt ekvivalenta.