MATEMATIK, Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Matematik IT, del B (TMA245b) 2002-04-05.

Lösningar:

(1) Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och får

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & -10 \end{pmatrix}.$$

Detta ger $z = -10/9$, $y = -4-4(-10/9) = 4/9$ och $x = 3-10/9-2\cdot 4/9 = 1$.

(2) Låt $Q = (2,2,3)$. Då är Q en punkt på linjen. Om $\overrightarrow{QP}_L$ är ortogonala projektionen av $\overrightarrow{QP}$ på linjen så ges avståndet d från P till linjen av

$$d = \sqrt{\left|\overrightarrow{QP}\right|^2 - \left|\overrightarrow{QP}_L\right|^2}.$$

Vektorn $\mathbf{n} = (1/\sqrt{14})(1\ 2\ 3)^t$ är en normaliserad riktningsvektor för linjen. Vi har att

$$\left|\overrightarrow{QP}\right|^2 = \left|(-1\ 0\ \ -3)^t\right|^2 = 1^2 + 3^2 = 10$$

och

$$\left|\overrightarrow{QP}_L\right|^2 = \left|(\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{QP})\mathbf{n}\right|^2 = \left|\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{QP}\right|^2 = \left|-10/\sqrt{14}\right|^2 = 50/7.$$

Alltså är det sökta avståndet $d = \sqrt{10-50/7} = \sqrt{20/7}$.

(3) En riktningsvektor för planet ges av riktningsvektorn för linjen $\mathbf{v}_1 = (1\ \ 2\ \ 3)^t$. En andra riktningsvektor $\mathbf{v}_2$ får man genom att ta vektorn från origo till en punkt på linjen, t ex $(2,2,3)$. Det ger $\mathbf{v}_2 = (2\ 2\ 3)^t$. Vi får nu en normalvektor till planet

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (0\ 3\ \ -2)^t.$$

Därmed är ekvationen för planet given av $3y - 2z + d = 0$, där $d = 0$ eftersom planet går genom origo. Svaret är alltså $3y - 2z = 0$.

(4) Om A har egenvärdena λ_1, λ_2 och λ_3 med motsvarande normaliserade ortogonala egenvektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ så är $A = PDP^t$ där $P = (\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3)$ och D är diagonal med egenvärdena på diagonalen. Vi bestämmer egenvärden och egenvektorer.

Den karakteristiska ekvationen ges av

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & 4 \\ -4 & 5-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 & 4 \\ -4 & 5-\lambda & 0 \\ 4 & 9-\lambda & 9-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (7-\lambda)(5-\lambda)(9-\lambda) + 4(-36+4\lambda+4(\lambda-5)) \\ &= -\lambda^3 + 21\lambda^2 - 111\lambda + 91 = -(\lambda-1)(\lambda^2-20\lambda+91) \\ &= -(\lambda-1)(\lambda-7)(\lambda-13). \end{aligned}$$

Här utnyttjade vi först att man kan addera en multipel av kolonn till en annan utan att ändra determinanten och för att faktorisera polynomet använde vi tipset att $\lambda = 1$ är ett egenvärde. Återstår nu att bestämma egenvektorerna.

$\lambda = 1$: Likheten $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$ ger

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}6 & -4 & 4\\ -4 & 4 & 0\\ 4 & 0 & 8\end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 3 & -2 & 2\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\\ &\longrightarrow \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

vilket ger $\mathbf{v}_1 = (1/3)\cdot(-2\ -2\ 1)^t$.

$\lambda = 7$: Likheten $A\mathbf{v}_2 = 7\mathbf{v}_2$ ger

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}0 & -4 & 4\\ -4 & -2 & 0\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix}-2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ &\longrightarrow \begin{pmatrix}-2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}-2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

vilket ger $\mathbf{v}_2 = (1/3)\cdot(1\ -2\ -2)^t$.

$\lambda = 13$: Likheten $A\mathbf{v}_2 = 13\mathbf{v}_2$ ger

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}-6 & -4 & 4\\ -4 & -8 & 0\\ 4 & 0 & -4\end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -3 & -2 & 2\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}\\ &\longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & -2 & -1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

vilket ger $\mathbf{v}_3 = (1/3)\cdot(-2\ 1\ -2)^t$.

Vi får alltså

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 1\\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix} \text{ och } D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 13\end{pmatrix}.$$

(5) En normaliserad riktningsvektor för linjen ges av $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\left(\begin{smallmatrix}1\\ k\end{smallmatrix}\right)$. Om $\mathbf{v}_L$ är ortogonala projektionen av en vektor $\mathbf{v}$ på linjen så ges speglingen av $\mathbf{v}$ av $\mathbf{v}_S = 2\mathbf{v}_L - \mathbf{v}$. Dessutom gäller att $\mathbf{v}_L = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\mathbf{n}$ så vi får att om $\mathbf{v} = \left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)$ så är

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_S &= 2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\mathbf{n} - \mathbf{v} = \frac{2}{1+k^2}\left[\begin{pmatrix}1\\ k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1\\ k\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{2}{1+k^2}(x+yk) - x\\ \frac{2k}{1+k^2}(x+yk) - y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{1+k^2} - 1 & \frac{2k}{1+k^2}\\ \frac{2k}{1+k^2} & \frac{2k^2}{1+k^2} - 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Matrisen för avbildningen är alltså

$$\frac{1}{1+k^2}\begin{pmatrix} 1-k^2 & 2k \\ 2k & k^2-1 \end{pmatrix}.$$

(6) Vi bestämmer först den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$. Ansätter $a_n = r^n$ vilket ger den karakteristiska ekvationen $r^2 - r - 2 = 0$ som har lösningarna -1 och 2. Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är alltså

$$h_n = c(-1)^n + d \cdot 2^n,$$

där c och d är godtyckliga konstanter.

Vi söker en partikulärlösning p_n genom att ansätta $p_n = a + bn$. Insättning i rekursionen med $a_n = p_n$ ger

$$\begin{aligned} 0 &= -(a+bn) + (a + b(n-1)) + 2(a + b(n-2)) + 5 - 2n \\ &= 2a - 5b + 5 + n(2b-2). \end{aligned}$$

Från detta får vi $2b - 2 = 0$ och $2a - 5b + 5 = 0$ vilket ger $b = 1$ och $a = 0$ så $p_n = n$ är en partikulärlösning.

Den allmänna lösningen till rekursionen är alltså

$$a_n = h_n + p_n = c(-1)^n + d \cdot 2^n + n.$$

De två basfallen ger villkor på c och d och vi får

$$\begin{aligned} \begin{cases} 1 = a_0 = c + d + 0 = c + d \\ 3 = a_1 = -c + 2d + 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} c = 1 - d \\ 2 = -(1-d) + 2d = 3d - 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} c = 0 \\ d = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Lösningen är alltså

$$a_n = 2^n + n.$$

(7) (a) Låt x_n vara antalet bilar på Landvetter vecka n och y_n antalet bilar på Centralen vecka n och sätt $\mathbf{v}_n = \left(\begin{smallmatrix} x_n \\ y_n \end{smallmatrix}\right)$. Informationen kan sammanfattas i det rekursiva sambandet

$$\mathbf{v}_{n+1} = A\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} 0.88 & 0.1 \\ 0.12 & 0.9 \end{pmatrix} \mathbf{v}_n.$$

Vi bestämmer egenvärden för A och får via den karakteristiska ekvationen

$$0 = \begin{vmatrix} 0.88 - \lambda & 0.1 \\ 0.12 & 0.9 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.78\lambda - 0.78 = (\lambda - 1)(\lambda - 0.78).$$

Vi har alltså egenvärdena $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 0.78$ och om $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ är motsvarande egenvektorer så får vi att

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_n &= A^n \mathbf{v}_0 = A^n(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2) = \alpha_1 \lambda_1^n \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \lambda_2^n \mathbf{e}_2 \\ &= \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 (0.78)^n \mathbf{e}_2 \longrightarrow \alpha_1 \mathbf{e}_1 \text{ då } n \to \infty. \end{aligned}$$

Det gäller alltså att räkna ut $\mathbf{e}_1$ som ger proportionerna.

Det homogena systemet $A\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$ har matrisen

$$A - I = \begin{pmatrix} -0.12 & 0.1 \\ 0.12 & -0.1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -0.12 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vilket har lösningarna $t\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$. Andelen på Landvetterkontoret blir alltså $5/(5+6) = 5/11$.

(b) Antag att vi har fördelningen med 70% av bilarna på Landvetter så att $\mathbf{v}_n = \left(\begin{smallmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{smallmatrix}\right)$. Då får vi

$$\mathbf{v}_{n+1} = A\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} 0.88 & 0.1 \\ 0.12 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.646 \\ 0.354 \end{pmatrix}$$

så för att ha 70% också i början av veckan därpå måste $0.7 - 0.646 = 0.054$, d v s 5.4% av totala bilparken köras från Centralen ut till Landvetter.

(8) Låt parallellogrammen vara $ABCD$. Låt $PQRS$ vara mittpunkterna i kvadraterna på sidorna AB, BC, CD respektive DA. Vi ska visa att $PQRS$ är en kvadrat. Sätt $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{u}$ och $\overrightarrow{AD} = 2\mathbf{v}$. Låt $\mathbf{u}'$ vara vektorn från mittpunkten av AB till P. Då gäller att $|\mathbf{u}| = |\mathbf{u}'|$ och $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0$. På motsvarande sätt låt $\mathbf{v}'$ vara vektorn från S till mittpunkten på AD. Då är $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}'|$ och $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' = 0$. Dessutom gäller att $(\mathbf{u}, \mathbf{u}')$ och $(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ har samma orientering så $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}'$ och $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}' = -\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}$. Den sista likheten följer av att om vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}'$ är α så är den mellan $\mathbf{u}'$ och $\mathbf{v}$ $\pi - \alpha$ och $\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha)$.

Om vi adderar vektorer och utnyttjar att $ABCD$ är en parallellogram så får vi

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{SR} = -\mathbf{u}' + \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{v}', \\ \overrightarrow{QR} &= \overrightarrow{PS} = -\mathbf{v}' + \mathbf{v} - \mathbf{u} - \mathbf{u}'. \end{aligned}$$

Vi ska visa att $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\overrightarrow{QR}\right|$ och $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QR} = 0$. Direkt beräkning samt utnyttjande av sambanden mellan $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{v}'$ ger

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 - \left|\overrightarrow{QR}\right|^2 &= \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{QR} \\ &= -4\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}' + 4\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QR} &= -2\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}' + |\mathbf{u}'|^2 - |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}'|^2 + |\mathbf{v}|^2 = 0. \end{aligned}$$

Detta var precis vad vi skulle visa och därmed är saken klar.