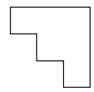
Linjära ekvationssystem

Teoriövningar

1. Antag att vi har en 3×5-matris A och betrakta det linjära ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Antag också att första kolonnen i A inte bara består av nollor. Tänk er nu att vi använder radoperationer för att omvandla A till trappstegsform.

   (a) Vilka olika 'former' kan trappstegsformen ha? (Det finns 11st olika.) En 3×3-matris med determinanten skild från noll t ex har 'trappstegsformen': 

   (b) Vilka kolonner har pivotelement respektive är fria variabler för de olika formerna?

   (c) Hur många lösningar kan de olika formerna ha? Hur många parametrar har de om det finns oändligt många lösningar?

2. Kolla upp vad ett **homogent** linjärt ekvationssystem är. Antag att vi har ett sådant med m ekvationer och n obekanta.

   (a) Vad händer med högerledsvektorn när man utför Gausselimination på systemet?

   (b) När finns det en unik, oändligt många respektive inga lösningar till systemet om $m = n$?

   (c) När finns det en unik, oändligt många respektive inga lösningar till systemet om $m < n$?

   (d) När finns det en unik, oändligt många respektive inga lösningar till systemet om $m > n$?

3. Betrakta ett linjärt ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där A är en 3×3-matris med kolonnerna $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ och $\mathbf{a}_3$ och $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^t$.

   (a) Skriv produkten $A\mathbf{x}$ som en linjärkombination av kolonnerna i A.

   (b) Motivera att $A\mathbf{x} = \mathbf{a}_i$ har lösning för $1 \leq i \leq 3$. Ge en lösning i vart och ett av fallen.

   (c) Försök uttrycka med ord mängden av alla $\mathbf{b}$ sådana att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har någon lösning.

   (d) Samma fråga som förra uppgiften för en godtycklig $m \times n$-matris A.

4. Ta reda på hur reduktion till trappstegsform av en (kvadratisk) matris A ger en faktorisering $A = LU$, där L är en undertriangulär matris med ettor på diagonalen och U är en övertriangulär matris. Härled sedan denna så kallade LU-faktorisering (eller LR-faktorisering) av matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 14 \end{pmatrix}.$$

Datorövningar

1. Vi ska börja med att titta på 3 olika sätt att lösa ett linjärt ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ när A är en kvadratisk matris. Det första sättet är att beräkna inversen till A (=inv(A) i Matlab) och multiplicera med den på lämpligt sätt. Det andra sättet är Gauss-elimination (skrives $A\backslash\mathbf{b}$ i Matlab). Matlabs rutin är såpass smart att den upptäcker om A har någon speciell form, t ex om A redan är triangulär och utnyttjar i så fall detta. Det tredje sättet är att först LU-faktorisera A ([L,U]=lu(A) i Matlab), d v s hitta triangulära matriser L och U sådana att $A = LU$. (I själva verket är inte L triangulär i allmänhet utan en triangulär matris som fått sina rader permuterade men det spelar ingen roll.) När man har LU-faktoriseringen kan man få lösningen genom att lösa två triangulära system. Hur då?
   (a) Bilda en 3×3-matris A med slumptal och en 3-vektor $\mathbf{b}$ också med slumptal. Lös sedan systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med de tre olika metoderna och kolla att du får samma svar. Kolla också att svaret är rätt! Hur gör man det?
   (b) Vi ska nu jämföra hur lång tid de tre olika metoderna tar. Med hjälp av paret av kommandon tic och toc kan man mäta tiden. Detta fungerar bra åtminstone när man har tider på 1/10s och uppåt. Använd slumpmatriser och slumpvektorer och testa storlekar upp till 1000×1000 och gärna högre. För LU-faktorisering kolla dels hur lång tid faktoriseringen tar och dels hur lång tid bakåtsubstitutionen tar. Kommentarer?
   (c) När kan man tänka sig att det är effektivt att använda LU-faktorisering?

2. I Matlab finns ett kommando RREF som utför Gauss-Jordan elimination på en matris. Använd den för att lösa ett par ekvationssystem där det finns fler obekanta än ekvationer, tag t ex någon av övningarna i boken.

3. Vi ska nu se vad Matlab gör om man kör Gausselimination när koefficientmatrisen inte är kvadratisk. Ta gärna RREF till hjälp för att svara på frågorna.
   (a) Låt först A vara en (inte alltför stor) slumpmatris med fler rader än kolonner, $\mathbf{b}$ en matchande vektor och låt Matlab lösa $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med Gauss-elimination $A\backslash\mathbf{b}$. Får du en lösning? Kolla att det är en lösning. Finns det fler lösningar?
   (b) Låt nu istället A ha fler kolonner än rader. Får du nu en lösning? Kolla att det är en lösning. Finns det fler lösningar?

4. Kolla upp vad kommandona NULL och ORTH gör. Vad har dessa att göra med homogena ekvationssystem respektive för vilka $\mathbf{b}$ som ett ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har lösning?

Uppgifterna 1 och 3 ska redovisas för övningsledaren.