Grafer och grannmatriser

Teoriövningar

1. Antag att vi har en graf (eller riktad graf) G. Vi definierar då det **sammanhängande höljet** $sh(G)$ av G som en graf med följande egenskaper:

   - $sh(G)$ har samma noder som G.
   - Det finns en kant mellan två noder i $sh(G)$ om och endast om det finns en väg mellan dem i grafen G.

   Påminner också om att en riktad graf är sammanhängande om det finns väg (i någon riktning) mellan varje par av noder och starkt sammanhängande om det finns i båda riktningarna mellan varje par av noder.

   (a) Antag att grafen G har grannmatrisen A. Ge en formel (algoritm) hur man kan beräkna grannmatrisen för $sh(G)$ från A.

   (b) Ge ett villkor för att (den ej riktade) grafen G är sammanhängande uttryckt i grannmatrisen för $sh(G)$.

   (c) Ge ett villkor för att den riktade grafen G är starkt sammanhängande uttryckt i grannmatrisen för $sh(G)$.

   (d) Ge ett villkor för att den riktade grafen G är sammanhängande uttryckt i grannmatrisen för $sh(G)$.

2. Vad är det för kriterium på en matris A för att den ska kunna vara övergångsmatrisen för en Markovkedja.

3. Om A är övergångsmatrisen för en slumpvandring (och mer allmänt för en Markovkedja) så har A^t i allmänhet egenvärdet 1 och alla andra egenvärden ligger i intervallet $[-1, 1]$.

   (a) Motivera att slumpvandringen har en unik stationär fördelning om A^t har egenvärdet 1 med bara en egenvektor $\mathbf{v}$ (och alla multiplar av denna förstås) och alla andra egenvärden ligger i det öppna intervallet $(-1, 1)$.

   (b) Hur beräknar man denna stationära fördelning?

   (c) Låt G vara grafen med bara två noder och en kant mellan dessa. Vi såg på föreläsningen att slumpvandringen på denna graf inte hade någon stationär fördelning. Beräkna egenvärdena för konjugatet av dess övergångsmatris och se om dessa kan ge någon förklaring till detta.

4. Låt G vara en graf med n noder. Antag att det för varje par av noder finns en kant mellan dem med sannolikheten p.

   (a) Låt $n = 2$ respektive 3. Vad är sannolikheten att G är sammanhängande?

   (b) Vad tror ni händer om vi fixerar p och låter n växa?

Datorövningar

Först ett litet tips som kan vara användbart i övningarna nedan. Om A är en matris och n är ett tal så ger kommandot $A > n$ en (logisk) matris med ettor på alla platser där elementet i A är större än n och nollor på övriga ställen. För att få en "vanlig" matris som man kan göra beräkningar med så kan man t ex skriva +(A>n).

1. Gör en funktion RANDGRAF som givet ett tal n och en sannolikhet p ger en riktad graf där det finns en kant från en nod till en annan (inklusive sig själv) med sannolikheten p.

2. Gör en funktion HOLJE som givet en grannmatris för en riktad graf ger det sammanhängande höljet.

3. Gör en funktion SMH (respektive STARKTSMH) som givet en grannmatris för en riktad graf ger 1 om den är sammanhängande (respektive starkt sammanhängande) och 0 annars. Tips: Använd något ni redan gjort och även kommandot ONES kan vara användbart.

4. Gör en funktion GRAF2MARKOV som givet grannmatrisen för en riktad graf ger övergångsmatrisen för motsvarande slumpvandring (Markovkedja).

5. Gör en funktion STATIONAR som givet matrisen för en Markovkedja ger den unika stationära fördelningen (om den existerar). Om matrisen man ger funktionen inte är övergångsmatrisen för en Markovkedja så ska funktionen ge svaret 'FELAKTIG MATRIS'. Om det inte finns unik stationär fördelning så ska den ge svaret 'EJ UNIK STATIONÄR FÖRDELNIG'.

6. Undersök experimentellt huruvida de svar ni fick i sista teoriuppgiften vad det gäller sannolikheten att grafer är sammanhängande verkar rimliga. Först bör ni skapa en funktion som ger grannmatrisen för en oriktad slumpgraf. Generera sedan ett stort antal slumpgrafer och kolla hur stor andel som är sammanhängande.

Uppgifterna 3 och 5 ska redovisas för övningsledaren.