Basbyten och linjära avbildningar

Innan vi fortsätter med egenvärden så ska vi titta på hur matrisen för en linjär avbildning beror på vilken bas vi använder. Vi vet sedan tidigare att till en linjär avbildning g hör en matris A sådan att

$$g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x},$$

där enligt bassatsen matrisen A t ex i fallet i 3 dimensioner ges av

$$A = \begin{pmatrix} g(\mathbf{e}_1) & g(\mathbf{e}_2) & g(\mathbf{e}_3) \end{pmatrix}$$

där $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_3$ är standardbasvektorerna. Detta är i själva verket inte mer än en del av sanningen. Matrisen beror ju i själva verket på vilken bas vi väljer. Det är just i standardbasen som den ser ut så här. Ska man vara riktigt korrekt så borde man skriva att

$$g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}_E,$$

där $\mathbf{x}_E$ är $\mathbf{x}$ koordinater i basen $E = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3)$ och ha i åtanke att A beror på basen.
Antag nu att $F = (\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3)$ är en annan bas. Bassatsen ger nu att

$$g(\mathbf{x}) = A_F\mathbf{x}_F, \text{ där } A_F = \begin{pmatrix} g(\mathbf{f}_1) & g(\mathbf{f}_2) & g(\mathbf{f}_3) \end{pmatrix}$$

Exempel 1 *Låt g vara den linjära avbildning som projicerar rummet på xy-planet. Vi har tidigare sett att denna har matrisen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i standardbasen.
Låt nu istället F vara ON-basen som består av vektorerna

$$F = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

och låt h vara den linjära avbildning som projicerar ortogonalt på planet som spänns upp av $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$. Matrisen för denna avbildning **i basen F** *kommer då att vara*

$$A_F = \begin{pmatrix} g(\mathbf{f}_1) & g(\mathbf{f}_2) & g(\mathbf{f}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De två linjära avbildningarna är uppenbarlien olika, ty normalvektorerna $\mathbf{e}_3$ respektive $\mathbf{f}_3$ till planen är inte parallella. Däremot har de två linjära avbildningarna samma matris om man jobbar i de två olika baserna.

I exemplet så såg vi att matrisen för den lite krångligare avbildningen h blev lika lätt som för g bara vi valde att jobba med en lämplig bas. Hitta matrisen för h i standardbasen är inte lika lätt, men vi ska se att man kan använda vår kunskap om basbyten för att få fram den. Vad vi söker är alltså en matris B sådan att

$$h(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}_E.$$

i standardbasen. Vi såg ovan att

$$h(\mathbf{x}) = A_F\mathbf{x}_F$$

i basen F. Från avsnittet om basbyten så vet vi att koordinaterna i standardbasen och basen F är relaterade genom

$$\mathbf{x}_F = F^{-1}\mathbf{x}_E$$

vilket ger att

$$h(\mathbf{x}) = A_F F^{-1}\mathbf{x}_E$$

fortfarande uttryckt i basen F. För att översätta detta till koordinater i E så utnyttjar vi att $\mathbf{y}_E = F\mathbf{y}_F$ med $\mathbf{y}_F = A_F F^{-1}\mathbf{x}_E$ och får slutligen

$$h(\mathbf{x}) = FA_F F^{-1}\mathbf{x}_E$$

i standardbasen E. Den sökta matrisen är alltså $B = FA_F F^{-1}$. Intuitivt kan man tolka B som så att först översätter F^{-1} från standardbasen till basen F, sedan utför A_F den linjära avbildningen i basen F och slutligen så översätter F tillbaka till standardbasen. Vi sammanfattar i följande sats.

Sats 1 *Låt en linjär avbildning ha matrisen A_F i basen $F = (\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3)$. Då har den matrisen*

$$A = FA_F F^{-1}$$

i standardbasen.

Exempel 2 *Vi återknyter till förra exemplet. Enligt satsen så får vi nu att matrisen för den linjära avbildningen h i standardbasen ges av*

$$A = FA_F F^{-1} = FA_F F^t = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observera speciellt att $F^{-1} = F^t$ eftersom det är en ON-bas så F är en ON-matris. Man kunde givetvis ha räknat fram A direkt genom att tänka geometriskt, men inte utan en hel del besvär. Det lönar sig att jobba med olika baser (och lära sig användbara satser som den ovan).

En av vinsterna med att beräkna egenvärden om man kan hitta en full uppsättning av linjärt oberoende egenvektorer (och det går t ex som vi vet om matrisen är symmetrisk) är att man får en bas där den linjära avbildningen är väldigt enkel. På en bas bestående av egenvektorer så är ju matrisen bara multiplikation med ett tal på respektive basvektor, så att matrisen i egenvektorsbasen blir diagonal. Det är detta som är kärnan i vad som kallas för **diagonalisering** som är nästa ämne då vi ska knyta samman egenvärden med denna diskussion om basbyten och linjära avbildningar.