

**Lösningar:**

- (1) Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och får

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & -10 \end{pmatrix}.$$

Detta ger  $z = -10/9$ ,  $y = -4 - 4(-10/9) = 4/9$  och  $x = 3 - 10/9 - 2 \cdot 4/9 = 1$ .

- (2) Låt  $Q = (2, 2, 3)$ . Då är  $Q$  en punkt på linjen. Om  $\overrightarrow{QP}_L$  är ortogonala projektionen av  $\overrightarrow{QP}$  på linjen så ges avståndet  $d$  från  $P$  till linjen av

$$d = \sqrt{|\overrightarrow{QP}|^2 - |\overrightarrow{QP}_L|^2}.$$

Vektorn  $\mathbf{n} = (1/\sqrt{14})(1 \ 2 \ 3)^t$  är en normaliserad riktningsvektor för linjen. Vi har att

$$|\overrightarrow{QP}|^2 = |(-1 \ 0 \ -3)^t|^2 = 1^2 + 3^2 = 10$$

och

$$|\overrightarrow{QP}_L|^2 = |(\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{QP})\mathbf{n}|^2 = |\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{QP}|^2 = |-10/\sqrt{14}|^2 = 50/7.$$

Alltså är det sökta avståndet  $d = \sqrt{10 - 50/7} = \sqrt{20/7}$ .

- (3) En riktningsvektor för planet ges av riktningsvektorn för linjen  $\mathbf{v}_1 = (1 \ 2 \ 3)^t$ . En andra riktningsvektor  $\mathbf{v}_2$  får man genom att ta vektorn från origo till en punkt på linjen, t ex  $(2, 2, 3)$ . Det ger  $\mathbf{v}_2 = (2 \ 2 \ 3)^t$ . Vi får nu en normalvektor till planet

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (0 \ 3 \ -2)^t.$$

Därmed är ekvationen för planet given av  $3y - 2z + d = 0$ , där  $d = 0$  eftersom planet går genom origo. Svaret är alltså  $3y - 2z = 0$ .

- (4) Om  $A$  har egenvärdena  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  och  $\lambda_3$  med motsvarande normaliserade ortogonala egenvektorer  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  och  $\mathbf{v}_3$  så är  $A = PDP^t$  där  $P = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3)$  och  $D$  är diagonal med egenvärdena på diagonalen. Vi bestämmer egenvärden och egenvektorer.

Den karakteristiska ekvationen ges av

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 7 - \lambda & -4 & 4 \\ -4 & 5 - \lambda & 0 \\ 4 & 0 & 9 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & 0 & 4 \\ -4 & 5 - \lambda & 0 \\ 4 & 9 - \lambda & 9 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (7 - \lambda)(5 - \lambda)(9 - \lambda) + 4(-36 + 4\lambda + 4(\lambda - 5)) \\ &= -\lambda^3 + 21\lambda^2 - 111\lambda + 91 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 20\lambda + 91) \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda - 7)(\lambda - 13). \end{aligned}$$

Här utnyttjade vi först att man kan addera en multipel av kolonn till en annan utan att ändra determinanten och för att faktorisera polynomet använde vi tipset att  $\lambda = 1$  är ett egenvärde. Återstår nu att bestämma egenvektorerna.

$\lambda = 1$ : Likheten  $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$  ger

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 6 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

vilket ger  $\mathbf{v}_1 = (1/3) \cdot (-2 \ -2 \ 1)^t$ .

$\lambda = 7$ : Likheten  $A\mathbf{v}_2 = 7\mathbf{v}_2$  ger

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

vilket ger  $\mathbf{v}_2 = (1/3) \cdot (1 \ -2 \ -2)^t$ .

$\lambda = 13$ : Likheten  $A\mathbf{v}_3 = 13\mathbf{v}_3$  ger

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -6 & -4 & 4 \\ -4 & -8 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

vilket ger  $\mathbf{v}_3 = (1/3) \cdot (-2 \ 1 \ -2)^t$ .

Vi får alltså

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \text{ och } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}.$$

- (5) En normaliserad riktningsvektor för linjen ges av  $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$ . Om  $\mathbf{v}_L$  är ortogonala projektionen av en vektor  $\mathbf{v}$  på linjen så ges speglingen av  $\mathbf{v}$  av  $\mathbf{v}_S = 2\mathbf{v}_L - \mathbf{v}$ . Dessutom gäller att  $\mathbf{v}_L = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n}$  så vi får att om  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  så är

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_S &= 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n} - \mathbf{v} = \frac{2}{1+k^2} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{1+k^2}(x+yk) - x \\ \frac{2k}{1+k^2}(x+yk) - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{1+k^2} - 1 & \frac{2k}{1+k^2} \\ \frac{2k}{1+k^2} & \frac{2k^2}{1+k^2} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Matrisen för avbildningen är alltså

$$\frac{1}{1+k^2} \begin{pmatrix} 1-k^2 & 2k \\ 2k & k^2-1 \end{pmatrix}.$$

- (6) Vi bestämmer först den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation  $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ . Ansätter  $a_n = r^n$  vilket ger den karakteristiska ekvationen  $r^2 - r - 2 = 0$  som har lösningarna  $-1$  och  $2$ . Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är alltså

$$h_n = c(-1)^n + d \cdot 2^n,$$

där  $c$  och  $d$  är godtyckliga konstanter.

Vi söker en partikulärlösning  $p_n$  genom att ansätta  $p_n = a + bn$ . Insättning i rekursionen med  $a_n = p_n$  ger

$$\begin{aligned} 0 &= -(a + bn) + (a + b(n-1)) + 2(a + b(n-2)) + 5 - 2n \\ &= 2a - 5b + 5 + n(2b - 2). \end{aligned}$$

Från detta får vi  $2b - 2 = 0$  och  $2a - 5b + 5 = 0$  vilket ger  $b = 1$  och  $a = 0$  så  $p_n = n$  är en partikulärlösning.

Den allmänna lösningen till rekursionen är alltså

$$a_n = h_n + p_n = c(-1)^n + d \cdot 2^n + n.$$

De två basfallen ger villkor på  $c$  och  $d$  och vi får

$$\begin{aligned} \begin{cases} 1 = a_0 = c + d + 0 = c + d \\ 3 = a_1 = -c + 2d + 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} c = 1 - d \\ 2 = -(1 - d) + 2d = 3d - 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} c = 0 \\ d = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Lösningen är alltså

$$a_n = 2^n + n.$$

- (7) (a) Låt  $x_n$  vara antalet bilar på Landvetter vecka  $n$  och  $y_n$  antalet bilar på Centralen vecka  $n$  och sätt  $\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ . Informationen kan sammanfattas i det rekursiva sambandet

$$\mathbf{v}_{n+1} = A\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} 0.88 & 0.1 \\ 0.12 & 0.9 \end{pmatrix} \mathbf{v}_n.$$

Vi bestämmer egenvärdena för  $A$  och får via den karakteristiska ekvationen

$$0 = \begin{vmatrix} 0.88 - \lambda & 0.1 \\ 0.12 & 0.9 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.78\lambda - 0.78 = (\lambda - 1)(\lambda - 0.78).$$

Vi har alltså egenvärdena  $\lambda_1 = 1$  och  $\lambda_2 = 0.78$  och om  $\mathbf{e}_1$  och  $\mathbf{e}_2$  är motsvarande egenvektorer så får vi att

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_n &= A^n \mathbf{v}_0 = A^n (\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2) = \alpha_1 \lambda_1^n \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \lambda_2^n \mathbf{e}_2 \\ &= \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 (0.78)^n \mathbf{e}_2 \longrightarrow \alpha_1 \mathbf{e}_1 \text{ då } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Det gäller alltså att räkna ut  $\mathbf{e}_1$  som ger proportionerna.

Det homogena systemet  $A\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$  har matrisen

$$A - I = \begin{pmatrix} -0.12 & 0.1 \\ 0.12 & -0.1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -0.12 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vilket har lösningarna  $t\left(\frac{5}{6}\right)$ . Andelen på Landvetterkontoret blir alltså  $5/(5+6) = 5/11$ .

- (b) Antag att vi har fördelningen med 70% av bilarna på Landvetter så att  $\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{pmatrix}$ . Då får vi

$$\mathbf{v}_{n+1} = A\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} 0.88 & 0.1 \\ 0.12 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.646 \\ 0.354 \end{pmatrix}$$

så för att ha 70% också i början av veckan därpå måste  $0.7 - 0.646 = 0.054$ , d v s 5.4% av totala bilparken köras från Centralen ut till Landvetter.

- (8) Låt parallelogrammen vara  $ABCD$ . Låt  $PQRS$  vara mittpunkterna i kvadraterna på sidorna  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  respektive  $DA$ . Vi ska visa att  $PQRS$  är en kvadrat. Sätt  $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{u}$  och  $\overrightarrow{AD} = 2\mathbf{v}$ . Låt  $\mathbf{u}'$  vara vektorn från mittpunkten av  $AB$  till  $P$ . Då gäller att  $|\mathbf{u}| = |\mathbf{u}'|$  och  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0$ . På motsvarande sätt låt  $\mathbf{v}'$  vara vektorn från  $S$  till mittpunkten på  $AD$ . Då är  $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}'|$  och  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' = 0$ . Dessutom gäller att  $(\mathbf{u}, \mathbf{u}')$  och  $(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$  har samma orientering så  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}'$  och  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}' = -\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}$ . Den sista likheten följer av att om vinkeln mellan  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}'$  är  $\alpha$  så är den mellan  $\mathbf{u}'$  och  $\mathbf{v}$   $\pi - \alpha$  och  $\cos \alpha = -\cos(\pi - \alpha)$ .

Om vi adderar vektorer och utnyttjar att  $ABCD$  är en parallelogram så får vi

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{SR} = -\mathbf{u}' + \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{v}', \\ \overrightarrow{QR} &= \overrightarrow{PS} = -\mathbf{v}' + \mathbf{v} - \mathbf{u} - \mathbf{u}'. \end{aligned}$$

Vi ska visa att  $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{QR}|$  och  $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QR} = 0$ . Direkt beräkning samt utnyttjande av sambanden mellan  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}'$ ,  $\mathbf{v}$  och  $\mathbf{v}'$  ger

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}|^2 - |\overrightarrow{QR}|^2 &= \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{QR} \\ &= -4\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}' + 4\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QR} &= -2\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}' + |\mathbf{u}'|^2 - |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}'|^2 + |\mathbf{v}|^2 = 0. \end{aligned}$$

Detta var precis vad vi skulle visa och därmed är saken klar.