MATEMATIK, Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Matematik IT, del B (TMA245b) 2002-08-28.

Lösningar:

(1) Vi beräknar determinanten av matrisen med de tre vektorerna som rader. Denna är skild från noll om och endast om vektorerna är linjärt oberoende. Vi får med hjälp av elementära radoperationer att

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-8-1) = -9 \neq 0,$$

så de är linjärt oberoende.

(2) Om R är matrisen för rotationen och S är matrisen för speglingen så är den sökta matrisen $M = SR$. Vi har att rotationen ges av

$$R = \begin{pmatrix} \cos\pi/3 & -\sin\pi/3 \\ \sin\pi/3 & \cos\pi/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Speglingen avbildar $\binom{1}{0}$ på $\binom{0}{1}$ och vice versa så

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Det ger att den sökta matrisen är

$$M = SR = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

(3) Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och får

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & a & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a+\frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Från detta ser vi att vi har unik lösning om $a \neq -\frac{5}{2}$ och då $a = -\frac{5}{2}$ så har vi oändligt många lösningar. Svaret är alltså: inte för några värden alls.

(4) Vi utnyttjar definitionen av skalärprodukt som ger att

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|},$$

där α är (minsta) vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. I vårt fall så får vi

$$\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{1}{2}.$$

Alltså är den sökta vinkeln $\alpha = \arccos\frac{1}{2} = \pi/3$.

(5) Vi bestämmer först den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation $a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}$. Ansätter $a_n = r^n$ vilket ger den karakteristiska ekvationen $r^2 - 7r + 12 = 0$ som har lösningarna 3 och 4. Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är alltså

$$h_n = c\cdot 3^n + d\cdot 4^n,$$

där c och d är godtyckliga konstanter.

Vi söker en partikulärlösning p_n genom att ansätta $p_n = a + bn$. Insättning i rekursionen med $a_n = p_n$ ger

$$\begin{aligned} 0 &= -(a+bn) + 7(a+b(n-1)) - 12(a+b(n-2)) + 6n \\ &= -6a + 17b + n(6-6b). \end{aligned}$$

Från detta får vi $6-6b=0$ och $-6a+17b=0$ vilket ger $b=1$ och $a=\frac{17}{6}$ så $p_n = \frac{1}{6}(17+6n)$ är en partikulärlösning.

Den allmänna lösningen till rekursionen är alltså

$$a_n = h_n + p_n = c \cdot 3^n + d \cdot 4^n + \frac{1}{6}(17+6n).$$

De två basfallen ger villkor på c och d och vi får

$$\begin{cases} 3 = a_0 = c + d + 17/6 \\ 9/2 = a_1 = 3c + 4d + 23/6 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 1/6 - d \\ 9/2 = 3(1/6-d) + 4d + 23/6 = d + 13/3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} c = 0 \\ d = 1/6 \end{cases}$$

Lösningen är alltså

$$a_n = \frac{1}{6}(4^n + 17 + 6n).$$

(6) Alla vektorer som är normaler till planet, d v s vektorer på formen $(0\ 0\ z)^t$, har spegelbild den vektor som är lika lång och pekar i precis motsatt riktning. Dessa kommer därför att vara egenvektorer med egenvärdet -1.

Alla vektorer som är parallella med planet, d v s vektorer på formen $(x\ y\ 0)^t$ kommer att vara oförändrade så de kommer alltså att vara egenvektorer med egenvärdet 1.

Vi har nu hittat tre linjärt oberoende egenvektorer (t ex de tre enhetsvektorerna) och därmed har vi hittat alla egenvektorer och egenvärden eftersom en 3×3-matris inte kan ha fler egenvektorer.

(7) Låt D vara diagonalmatrisen med 2, 3 och 4 på diagonalen och låt P vara matrisen med de tre vektorerna (normerade) som kolonner. Då kommer matrisen $A = PDP^{-1}$ att ha de önskade egenvärdena och egenvektorerna. Observera att de tre vektorerna är inbördes ortogonala. Därför är P en ON-matris (eftersom vi normerat kolonnerna) och $P^{-1} = P^t$. Vi får därför att exempelvis matrisen

$$A = PDP^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 10 & -2 & -1 \\ -2 & 10 & -1 \\ -1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

uppfyller kraven.

(8) (a) Den är reflexiv eftersom om vi väljer P att vara identitetsmatrisen så är $A = PAP^{-1}$ och därmed är A konjugerad med sig själv. Den är symmetrisk eftersom om $A = PBP^{-1}$ så är ju $B = P^{-1}AP$ så om

A är konjugerad med B så är B konjugerad med A. Den är transitiv eftersom om $A = P_1 B P_1^{-1}$ och $B = P_2 C P_2^{-1}$, så är

$$A = P_1 B P_1^{-1} = P_1 P_2 C P_2^{-1} P_1^{-1} = (P_1 P_2) C (P_1 P_2)^{-1}.$$

Med andra ord om A är konjugerad med B och B är konjugerad med C så är A konjugerad med C vilket precis är villkoret för transitiviteten.

Eftersom den är reflexiv, symmetrisk och transitiv så är den per definition en ekvivalensrelation.

(b) Antag att A och B är konjugerade och att λ är ett egenvärde till A. Det räcker att visa att då är λ ett egenvärde också till B, ty då är alla egenvärden till A egenvärden till B och omvändningen följer av symmetrin.

Vi antar alltså att $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ för någon vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ och $A = PBP^{-1}$ för en inverterbar matris P. Då får vi att

$$B(P^{-1}\mathbf{v}) = (P^{-1}AP)P^{-1}\mathbf{v} = P^{-1}A\mathbf{v} = P^{-1}\lambda\mathbf{v} = \lambda P^{-1}\mathbf{v},$$

så λ är alltså ett egenvärde till B med egenvektorn $P^{-1}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.