

MATEMATIK, Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Matematik IT, del B (TMA245b) 2001-12-21.

Lösningar:

1. De tre första punkterna ligger inte på en linje så de ligger på ett unikt plan. Riktningsektorer för planet är $\mathbf{v}_1 = (0, 1, -2) - (1, -1, -1) = (-1, 2, -1)$ och $\mathbf{v}_2 = (4, -1, -2) - (1, -1, -1) = (3, 0, -1)$. En normalvektor ges då av

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2, -4, -6) = -2(1, 2, 3).$$

Ekvationen för planet är därmed $x + 2y + 3z + d = 0$ och insättning av $(1, -1, -1)$ ger $d = -1 - 2(-1) - 3(-1) = 4$. Vi testar med den fjärde punkten och får $2 + 2(-3) + 3 \cdot 4 + 4 = 12 \neq 0$ och alltså ligger inte den på planet som de andra ligger på och därmed ligger inte alla fyra punkterna på ett plan.

2. Om Q är en godtycklig punkt i planet så gäller att avståndet från P till planet ges av längden av den ortogonala projektionen, \overrightarrow{QP}_n , av \overrightarrow{QP} på normalen till planet.

Vi väljer $Q = (1, -1, -1)$. Då är $\overrightarrow{QP} = (0 \ 1 \ 4)^t$ och $\mathbf{n} = (1/\sqrt{14})(1 \ 2 \ 3)^t$ är en normerad normalvektor. Det sökta avståndet blir då

$$\left| \overrightarrow{QP}_n \right| = \left| (\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{QP}) \mathbf{n} \right| = \left| \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{QP} \right| = \frac{1}{\sqrt{14}}(2 + 12) = \sqrt{14}.$$

3. Om P är matrisen för projektionen och R är matrisen för rotationen så är den sökta matrisen $A = RP$.

För projektionen är \mathbf{e}_x och \mathbf{e}_y oförändrade och \mathbf{e}_z avbildas på nollvektorn så

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

För rotationen är \mathbf{e}_x oförändrad, \mathbf{e}_y avbildas på \mathbf{e}_z och \mathbf{e}_z avbildas på $-\mathbf{e}_y$ så

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Därmed är den sökta matrisen

$$A = RP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och får

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & a & 4 \\ 2 & a & a & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & a+2 & -2 \\ 0 & a-4 & a+2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & \frac{a+2}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{a^2}{2} - 2 & -a \end{pmatrix} \\ \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{a+2}{2} & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 4 & -2a \end{pmatrix}.$$

Denna har ej unik lösning om och endast om $a^2 - 4 = 0$, dvs om och endast om $a = \pm 2$. I dessa fall blir $-2a = \mp 4$ så ekvationssystemet saknar då lösning.

5. De fem punkterna ger följande ekvationssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Om vi betecknar koefficientmatrisen med A och högerledsvektorn med \mathbf{b} så ges minstakvadratlösningen av lösningen till $A^t A \mathbf{x} = A^t \mathbf{b}$. Multiplikation med A^t ger

$$A^t A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{pmatrix} \text{ och } A^t \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 28 \\ 59 \\ 165 \end{pmatrix}.$$

Vi löser detta ekvationssystem med Gausselimination

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 30 & 28 \\ 10 & 30 & 100 & 59 \\ 30 & 100 & 354 & 165 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & \frac{28}{5} \\ 0 & 10 & 40 & 3 \\ 0 & 40 & 174 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & \frac{28}{5} \\ 0 & 1 & 4 & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 14 & -15 \end{pmatrix},$$

vilket ger $c = -15/14$, $b = 3/10 - 4(-15/14) = 321/70$ och $a = 28/5 - 6(-15/14) - 2(321/70) = 20/7$ så svaret blir

$$y = \frac{20}{7} + \frac{321}{70}x - \frac{15}{14}x^2.$$

6. (a) Följer av att likhet har motsvarande egenskaper, t ex är den transitiv eftersom om $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ och $c^2 + d^2 = e^2 + f^2$ så är uppenbarligen $a^2 + b^2 = e^2 + f^2$.

(b) Den ges av

$$[(1, 0)] = \{(a, b) : a^2 + b^2 = 1^2 + 0^2 = 1\}$$

vilket är alla par (a, b) på cirkeln med centrum i origo och radien 1.

(c) De ges av alla cirklar med centrum i origo plus $\{(0, 0)\}$.

7. Låt $ABCD$ vara den givna parallelogrammen och låt M_1 vara mittpunkten på diagonalen från A till C och M_2 mittpunkten på diagonalen från B till D . Vi ska visa att $M_1 = M_2$. Det är ekvivalent att visa att $\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{AM_2}$. Villkoren att de är mittpunkter och att $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ ger

$$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

och

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM_2} &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM_1}\end{aligned}$$

och därmed är saken klar.

8. Förutsättningarna ger att

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \beta \\ 1 - \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

med $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$. Den karakteristiska ekvationen blir då

$$\begin{aligned}0 &= \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & 1 - \beta \\ 1 - \alpha & \beta - \lambda \end{vmatrix} = (\alpha - \lambda)(\beta - \lambda) - (1 - \alpha)(1 - \beta) \\ &= \lambda^2 - (\alpha + \beta)\lambda + (\alpha + \beta - 1) = (\lambda - 1)(\lambda - (\alpha + \beta - 1)),\end{aligned}$$

så att A har alltså egenvärdena $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = \alpha + \beta - 1$. Dessutom gäller att

$$\lambda_2 = \alpha + \beta - 1 \geq 0 + 0 - 1 \geq -1 \text{ och } \lambda_2 = \alpha + \beta - 1 \leq 1 + 1 - 1 \leq 1$$

och därmed är saken klar.