Vektorer av dimension n

Definition 1 *En* **vektor av dimension** n *(n-vektor)* $\mathbf{v}$ *definieras som en ordnad n-tipel av reella tal och vi skriver*

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Mängden av alla n-vektorer betecknas med $\mathbb{R}^n$.

Exempel 1 *Antag att vi vill beskriva vinden i ett rum vid olika tidpunkter. Det kan man göra med en 7-dimensionell vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x & y & z & t & x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}^t$, där (x, y, z) är rumskoordinaterna, t är tidpunkten och (x_v, y_v, z_v) är hastighetsvektorn för vinden i punkten (x, y, z) vid tidpunkten t.*

Vi definierar nu ett antal operationer och begrepp som vi hade för vektorer i planet och rummet för godtyckliga vektorer. Givetvis viktigt att definiera dem så att de stämmer överens med de definitioner vi redan gjort i specialfallen $n = 2$ och $n = 3$.
Låt $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix}^t$ och $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}^t$ vara två n-vektorer och $c \in \mathbb{R}$. Vi definierar nu:

1. Addition:
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}.$$

2. Multiplikation med skalär:
$$c\mathbf{u} = \begin{pmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ \vdots \\ cu_n \end{pmatrix}.$$

3. Skalärprodukt:
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

4. Längden av en vektor:
$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}.$$

I analogi med vår tidigare erfarenhet av vektorer i planet och rummet gör vi följande definitioner.

Definition 2 *Vi säger att två vektorer* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *är* **parallella** *om det finns ett reellt tal* c *så att* $c\mathbf{u} = \mathbf{v}$ *och vi säger att de är* **ortogonala** *om* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Det är nu en viktig (men kanske inte jättekul) uppgift att visa att dessa definitioner följer samma räkneregler som de vi tidigare visat för vektorer i planet och rummet. Många av bevisen är helt identiska och vi gör ett av dem som exempel och använder sedan detta för att visa att Pythagoras sats gäller också i godtycklig dimension.

Proposition 1 *Skalärprodukt är distributiv över addition, d v s*

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$

för n*-vektorer* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *och* $\mathbf{w}$.

Bevis. Vi får direkt från definitionen av addition och skalärprodukt (och med uppenbar notation) att

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} u_i(v_i + w_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} u_i v_i + u_i w_i = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i + \sum_{i=1}^{n} u_i w_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}.
\end{aligned}$$

Vad vi utnyttjade förutom definitionerna var i stort sett enbart distributiviteten för vanlig multiplikation och addition. □

Sats 1 *Pythagoras sats gäller i godtycklig dimension* n*, d v s om* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *är ortogonala* n*-vektorer så gäller att*

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2.$$

Bevis. Förutsättningen att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är ortogonala är per definition ekvivalent med att $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Genom att utnyttja definitionen av längd av en vektor och propositionen ovan så får vi

$$\begin{aligned}
|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\
&= |\mathbf{u}|^2 + 0 + 0 + |\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2.
\end{aligned}$$

□

Linjära avbildningar

Vi ska nu titta på matriser av godtycklig storlek och bl a se hur varje matris ger upphov till en linjär avbildning.
Kom ihåg att en matris av typ $m \times n$ var ett tvådimensionellt fält av reella tal med m rader och n kolonner. Om två matriser A och B är av typ $m \times n$

respektive $n \times p$ så definierade vi $C = AB$ som en matris av typ $m \times p$ med element c_{ij} som ligger i rad i och kolonn j som

$$c_{ij} = \mathbf{a}_i^t \cdot \mathbf{b}_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

där $\mathbf{a}_i$ är rad i i A och $\mathbf{b}_j$ är kolonn j i B. Man kan alltså se varje element i produkten som en skalärprodukt mellan (transponatet av) en rad i A och en kolonn i B.

Anmärkning 1 *Notera följande likhet*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^t \mathbf{v},$$

där produkten i högerledet är matrismultiplikation mellan en matris med bara en rad och en annan med bara en kolonn. Observera också att om $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *är* n*-vektorer (*$=n \times 1$*-matriser) så är* $\mathbf{u}^t\mathbf{v}$ *ett tal medan* $\mathbf{u}\mathbf{v}^t$ *är en* $n \times n$*-matris.*

Antag nu att vi har en $m \times n$-matris A och en n-vektor $\mathbf{v}$. Då gäller att $A\mathbf{v}$ är av typ $m \times 1$, d v s en m-vektor. Vi ser alltså att en $m \times n$-matris A ger en avbildning som till varje element i $\mathbb{R}^n$ ordnar ett element i $\mathbb{R}^m$.

Definition 3 *Låt* A *vara en* $m \times n$*-matris. Då definierar vi* **matrisavbildningen** f *som hör till* A *som*

$$f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}, \quad f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Exempel 2 *Låt* f *vara projektionen från* $\mathbb{R}^3$ *på* $\mathbb{R}^2$ *som projicerar rummet ortogonalt på* xy*-planet. Det betyder helt enkelt att punkten* (x, y, z) *ska avbildas på* (x, y)*. Detta svarar mot matrisen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ty vi har att

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Projektionen är alltså en matrisavbildning.

Vi rekapitulerar att en avbildning var linjär om

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \text{ och } f(c\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x}),$$

för alla vektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ samt reella tal c.
För matrisavbildningen som hör till A så får vi

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$$

och

$$f(c\mathbf{x}) = A(c\mathbf{x}) = (Ac)\mathbf{x} = (cA)\mathbf{x} = c(A\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x}),$$

så att matrisavbildningarna är linjära. Omvänt kan man visa att alla linjära avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ är matrisavbildningar som hör till någon $m \times n$-matris. Begreppen matrisavbildningar och linjära avbildningar är alltså ekvivalenta.

Exempel 3 *Vi ska nu betrakta ortogonal projektion på en godtycklig linje i* $\mathbb{R}^n$*, d v s varje vektor i* $\mathbb{R}^n$ *ska projiceras ortogonalt på en linje* L *i* $\mathbb{R}^n$*. Man kan ange en linje i* $\mathbb{R}^n$ *på parameterform precis som i planet och rummet genom* $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$*,*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x0_1 \\ x0_2 \\ \vdots \\ x0_n \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

där x_0 *är en punkt på* L *och* $\mathbf{v}$ *en riktningsvektor för* L*. I analogi med tidigare så definierar vi ortogonala projektionen av* $\mathbf{x}$ *på* L*,* $\mathbf{x}_L$*, som den vektor* $c\mathbf{v}$ *som är sådan att* $\mathbf{x} - \mathbf{x}_L$ *är ortogonal mot* $\mathbf{v}$*. Detta ger*

$$0 = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_L) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} - c\mathbf{v} \cdot \mathbf{v},$$

och från detta löser vi ut $c = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} / \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ *och får*

$$\mathbf{x}_L = c\mathbf{v} = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v},$$

vilket påminner om en formel vi känner igen (här har vi inte normerat riktningsvektorn $\mathbf{v}$*). Nu ska vi utnyttja likheten* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{x}^t \mathbf{v}$ *och att multiplikation av ett tal med en matris är kommutativ vilket ger*

$$\mathbf{x}_L = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2}(\mathbf{v}^t \mathbf{x})\mathbf{v} = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}(\mathbf{v}^t \mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2}(\mathbf{v}\mathbf{v}^t)\mathbf{x}.$$

Detta visar att den ortogonala projektionen på en linje L *med riktningsvektor* $\mathbf{v}$ *är en linjär avbildning med matrisen*

$$A = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2}(\mathbf{v}\mathbf{v}^t).$$

Observera att som vi nämnde tidigare är $\mathbf{v}\mathbf{v}^t$ *en* $n \times n$*-matris.*