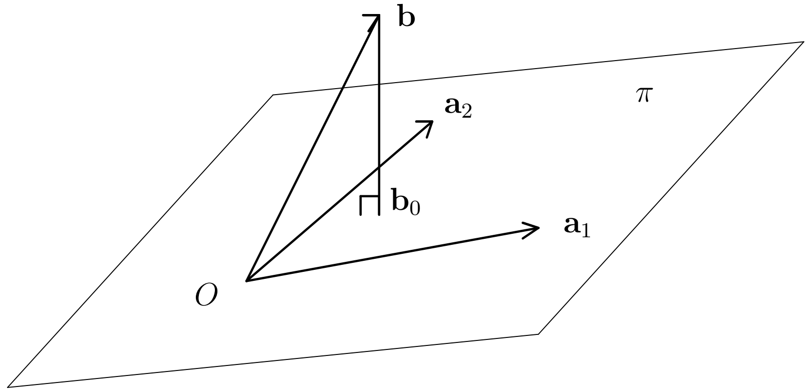
Överbestämda ekvationssystem

Antag att vi har 3 ekvationer och 2 obekanta, så $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där $A = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2)$ är en 3×2-matris. Då är

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2$$

en linjärkombination av kolonnerna $\mathbf{a}_1$ och $\mathbf{a}_2$ i A. Så $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har lösning om och endast om $\mathbf{b}$ är en linjärkombination av kolonnerna i A. Alla linjärkombinationer av $\mathbf{a}_1$ och $\mathbf{a}_2$ är ett plan π i $\mathbb{R}^3$.



Antag nu att vi har en vektor $\mathbf{b}$ som inte ligger i planet π och låt $\mathbf{b}_0$ vara ortogonala projektionen av $\mathbf{b}$ på π. Då är en vektor $\mathbf{x}_0$ sådan att $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_0$ så nära en lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ man komma i den meningen att

$$|A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}| \leq |A\mathbf{x} - \mathbf{b}|$$

för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.
Hur bestämmer man $\mathbf{x}_0$? Sätt $\mathbf{r} = A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}$. Då är $\mathbf{r}$ ortogonal mot varje vektor i π och speciellt mot $\mathbf{a}_1$ och $\mathbf{a}_2$. Det ger

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1^t\mathbf{r} = 0 \\ \mathbf{a}_2^t\mathbf{r} = 0 \end{cases} \quad \text{d v s } A^t\mathbf{r} = \mathbf{0}.$$

Men

$$0 = A^t\mathbf{r} = A^t(A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}) = A^tA\mathbf{x}_0 - A^t\mathbf{b},$$

d v s $A^tA\mathbf{x}_0 = A^t\mathbf{b}$, så $\mathbf{x}_0$ är en lösning till $A^tA\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$.
Detta kan (ganska enkelt) bevisas i det allmänna fallet (se boken) och vi har:

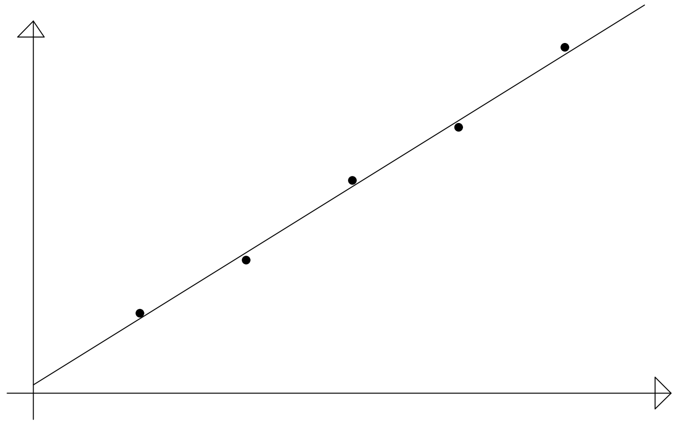
Sats 1 *Residualvektorn $\mathbf{r} = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$ blir minimal om $\mathbf{x}$ satisfierar (normalekvationen) $A^tA\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$.*

Anmärkning 1 *Denna 'lösning' kallas för en minstakvadratlösning.*

Exempel 1 *Typexempel på ett överbestämt system är när man har en mängd data som man vill anpassa så bra som möjligt till någon typ av funktion. Antag att vi har mätdata*

x	1	2	3	4	5
y	3	5	8	10	13

och så vill vi hitta en rät linje $y = kx + m$ som stämmer överens 'så bra som möjligt' med dessa data.



Vi får ett ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *med 5 ekvationer och 2 obekanta:*

$$\begin{cases} 3 = 1k + m \\ 5 = 2k + m \\ 8 = 3k + m \\ 10 = 4k + m \\ 13 = 5k + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Vi bestämmer normalekvationen $A^t A\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$ *och får*

$$A^t A = \begin{pmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{pmatrix} \text{ och } A^t\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 142 \\ 39 \end{pmatrix}.$$

Löser vi denna så får vi lösningen $(5/2\ 3/10)^t$, *d v s* $k = 5/2$ *och* $m = 3/10$ *som är linjen som är ritad i bilden.*

Basbyten

Vi rekapitulerar att en uppsättning B av vektorer kallas för en bas om varje vektor kan skrivas som en unik linjärkombination av vektorerna i B. Standardexemplet är basen

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

som kallas just standardbasen för $\mathbb{R}^n$.

Låt nu $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ vara en bas för $\mathbb{R}^n$, vilken som helst. Vi tänker oss $\mathbf{f}_i$ som en vektor med koordinater i standardbasen. Varje vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ kan skrivas som

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2 + \cdots + x_n\mathbf{f}_n,$$

för några tal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ som kallas för $\mathbf{x}$ koordinater i basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n)$. Denna likhet kan skrivas på matrisform som

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \ldots & \mathbf{f}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = F\mathbf{x}_F.$$

Med andra ord är kolumnerna i F koordinaterna för basvektorerna $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ (i standardbasen) och $\mathbf{x}_F$ är vektorn som består av $\mathbf{x}$ koordinater i basen F. Från den här likheten får vi genom att multiplicera med F^{-1} (som existerar eftersom kolonnerna i F är linjärt oberoende) att

$$\mathbf{x}_F = F^{-1}\mathbf{x}.$$

Så man får alltså koordinaterna $\mathbf{x}_F$ i basen F genom att multiplicera de gamla koordinaterna med F^{-1}.

Exempel 2 *Vektorerna* $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *och* $\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *är inte parallella så de utgör en bas för* $\mathbb{R}^2$*. Sätt*

$$F = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Då är

$$F^{-1} = \frac{1}{1-4}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Koordinaterna för standardvektorerna $\mathbf{e}_1$ *och* $\mathbf{e}_2$ *i basen* $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ *ges då av*

$$(\mathbf{e}_1)_F = F^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

och

$$(\mathbf{e}_2)_F = F^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}.$$

Antag nu mer allmänt att vi har två godtyckliga baser $F = (\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2 \ldots \mathbf{f}_n)$ och $G = (\mathbf{g}_1\ \mathbf{g}_2 \ldots \mathbf{g}_n)$. Vi kan uttrycka basvektorerna i F i de i G:

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 = p_{11}\mathbf{g}_1 + p_{21}\mathbf{g}_2 + \cdots + p_{n1}\mathbf{g}_n \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n = p_{1n}\mathbf{g}_1 + p_{2n}\mathbf{g}_2 + \cdots + p_{nn}\mathbf{g}_n \end{cases}$$

för några tal p_{ij}. Detta blir på matrisform

$$F = (\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2 \ldots \mathbf{f}_n) = (\mathbf{g}_1\ \mathbf{g}_2 \ldots \mathbf{g}_n)\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = GP.$$

Låt $\mathbf{x}$ vara en godtycklig vektor. Då är

$$\mathbf{x} = F\mathbf{x}_F \text{ och } \mathbf{x} = G\mathbf{x}_G,$$

där $\mathbf{x}_F$ är koordinaterna för $\mathbf{x}$ i basen F och $\mathbf{x}_G$ de i basen G. Vi får

$$G\mathbf{x}_G = \mathbf{x} = F\mathbf{x}_F = GP\mathbf{x}_F.$$

Detta ger att

$$\mathbf{x}_G = P\mathbf{x}_F,$$

ty båda vektorerna är $\mathbf{x}$ koordinater i basen G. Vi sammanfattar i följande sats:

Sats 2 *Låt* $F = (\mathbf{f}_1\, \mathbf{f}_2 \ldots \mathbf{f}_n)$ *och* $G = (\mathbf{g}_1\, \mathbf{g}_2 \ldots \mathbf{g}_n)$ *vara två baser för* $\mathbb{R}^n$. *Antag att de är relaterade genom* $F = GP$. *Låt* $\mathbf{x}$ *vara en vektor med koordinaterna* $\mathbf{x}_F$ *respektive* $\mathbf{x}_G$ *i baserna* F *respektive* G. *Då gäller*

- $\mathbf{x}_G = P\mathbf{x}_F$.
- $\mathbf{x}_F = P^{-1}\mathbf{x}_G$.
- $G = FP^{-1}$
- $P = G^{-1}F$

Exempel 3 *Låt* $\mathbf{f}_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{f}_2 = \left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)$ *och* $\mathbf{g}_1 = \left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{g}_2 = \left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ *vara två baser för* $\mathbb{R}^2$. *Dessa är relaterade genom*

$$F = (\mathbf{f}_1\, \mathbf{f}_2) = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = G\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Antag att $\mathbf{x}$ *har koordinaterna* $\mathbf{x}_F = \left(\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right)$ *i basen* F, *d v s*

$$\mathbf{x} = 2\mathbf{f}_1 + 3\mathbf{f}_2.$$

Då är

$$\mathbf{x}_G = P\mathbf{x}_F = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}.$$

Kontroll i standardbasen ger:

$$\begin{aligned}
2\mathbf{f}_1 + 3\mathbf{f}_2 &= 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}\\
3\mathbf{g}_1 - 2\mathbf{g}_2 &= 3\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

ON-matriser

Definition 1 *En linjär avbildning från* $\mathbb{R}^n$ *till* $\mathbb{R}^n$ *är* **isometrisk** *om den bevarar längder, d v s om*

$$|A\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|,$$

för alla vektorer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. *Motsvarande matris säges vara en* **ON-matris**.

Exempel 4 *Exempel på isometriska avbildningar i* $\mathbb{R}^2$ *är rotationer kring origo och spegling genom origo. Båda dessa typer av avbildningar bevarar uppenbarligen längden hos en vektor.*

Man kan visa (se boken avsnitt 6.2) att ON-matriser inte bara bevarar längder utan skalärprodukter i allmänhet, d v s

$$A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y},$$

för alla vektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$. Detta ger att om A är en ON-matris och man tar en ON-bas $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ så kommer också $A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n$ att vara en ON-bas, ty alla kommer fortfarande vara av längd 1 och skalärprodukten mellan olika element kommer att vara 0. Men vi vet sedan tidigare att

$$A = \begin{pmatrix}A\mathbf{e}_1 & A\mathbf{e}_2 & \cdots & A\mathbf{e}_n\end{pmatrix}$$

så vi får:

Sats 3 *Den kvadratiska matrisen A är en ON-matris om och endast om dess kolonner utgör en ON-bas.*

Exempel 5 *Betrakta matrisen*

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi ser att alla kolonner har längd 1 och att de är parvis ortogonala. Alltså är A en ON-matris.

Ett alternativt sätt att uttrycka att kolonnerna i en matris A är ortonormerade är att säga att $A^tA = I$, ty när man beräknar A^tA så tar man skalärprodukt mellan kolonnerna i A. Denna produkt blir identitetsmatrisen om och endast om skalärprodukten av en kolonn med sig själv (d v s längden i kvadrat) blir 1 och skalärprodukten mellan olika kolonner blir 0. Men om $A^tA = I$ så måste $A^t = A^{-1}$, så vi har följande viktiga egenskap hos ON-matriser som gör det en barnlek att beräkna dess invers.

Sats 4 *Den kvadratiska matrisen A är en ON-matris om och endast $A^t = A^{-1}$.*