MATEMATIK, Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Matematik IT, del B (TMA245b) 2003-04-16.

Lösningar:

1. Låt $Q = (-2, 0, 0)$. Då är Q en punkt på linjen ($t = -3$). Om $\overrightarrow{QP}_L$ är ortogonala projektionen av $\overrightarrow{QP}$ på linjen så ges avståndet d från $P = (1, 1, 1)$ till linjen av
$$d = \sqrt{\left|\overrightarrow{QP}\right|^2 - \left|\overrightarrow{QP}_L\right|^2}.$$
Vektorn $\mathbf{n} = (1/\sqrt{14})(1\ 2\ 3)^t$ är en normaliserad riktningsvektor för linjen. Vi har att
$$\left|\overrightarrow{QP}\right|^2 = \left|(3\ 1\ 1)^t\right|^2 = 3^2 + 1^2 + 1^2 = 11$$
och
$$\left|\overrightarrow{QP}_L\right|^2 = \left|(\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{QP})\mathbf{n}\right|^2 = \left|\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{QP}\right|^2 = \left|8/\sqrt{14}\right|^2 = 64/14 = 32/7.$$
Alltså är det sökta avståndet $d = \sqrt{11 - 32/7} = \sqrt{45/7}$.

2. Vi beräknar determinanten av matrisen med de tre vektorerna som kolumner. Denna är skild från noll om och endast om vektorerna är linjärt oberoende. Vi får med hjälp av elementära radoperationer att
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 6 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & -16 & -52 \\ 0 & -7 & -14 \end{vmatrix} = (-4)(-7)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 28\cdot(8-13) = -140,$$
så de är linjärt oberoende.

3. (a) En riktningsvektor ges av
$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ -1-3 \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix},$$
så
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 4t \\ z = 4 + t \end{cases}$$
är en ekvation för linjen.

   (b) Det finns oändligt många plan som innehåller linjen och om vi tar ett plan med ekvationen $Ax + By + Cz + D = 0$ så ligger linjen på detta om och endast om
$$0 = A(1+t)+B(3-4t)+C(4+t)+D = (A+3B+4C+D)+(A-4B+C)t$$

för alla t. Detta är ekvivalent med att

$$\begin{cases} A + 3B + 4C + D = 0 \\ A - 4B + C = 0 \end{cases}$$

Detta är ekvivalent med (vi subtraherar den första ekvationen från den andra)

$$\begin{cases} A + 3B + 4C + D = 0 \\ -7B - 3C = 0 \end{cases}$$

vilket har lösningarna $D = s$, $C = 7t$, $B = -3t$ och $A = -19t - s$ där s och t är fria parametrar. Ett exempel får vi om vi sätter $s = 1$ och $t = 0$:

$$-x + 1 = 0.$$

4. Vi har att $\mathbf{e}_y$ är oförändrad och att xz-planet roterar i positiv led. Det ger att

$$A = \begin{pmatrix} \cos\pi/4 & 0 & -\sin\pi/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\pi/4 & 0 & \cos\pi/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Spegling i yz-planet påverkar inte $\mathbf{e}_y$ och $\mathbf{e}_z$ medan $\mathbf{e}_x$ avbildas på $-\mathbf{e}_x$. Det ger att

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Den sökta matrisen är

$$C = BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

5. Vi gör Gausselimination

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 5 & -6 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5/2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4/3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 5/2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4/3 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7/2 & -13/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4/3 \end{pmatrix}$$

Från detta får vi en lösning med två fria parametrar och alltså geometriskt ett plan i $\mathbb{R}^5$. En parametrisering av planet ges av

$$\mathbf{x} = s\begin{pmatrix} -1 \\ -7/2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 13/3 \\ 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6. (a) Basvektorerna $\mathbf{e}_x$ och $\mathbf{e}_y$ är opåverkade och $\mathbf{e}_z$ avbildas på $-\mathbf{e}_z$, så matrisen blir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Detta är en diagonalmatris och determinanten är därmed produkten av elementen på diagonalen som ju blir precis -1.

(b) Determinanten är multiplikativ och $\det M = 1/\det M^{-1}$ för alla inverterbara matriser M så

$$\det B = \det(PCP^{-1}) = \det P \det C \det P^{-1} = \det P \det C / \det P = \det C.$$

(c) Låt F vara en ON-bas vars två första vektorer spänner upp planet som man speglar i. Då är speglingens matris i basen F inget annat än

$$A_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

precis som i första deluppgiften. Speglingens matris A i standardbasen ges då enligt känd sats av

$$A = FA_FF^{-1}.$$

Enligt andra deluppgiften är därmed

$$\det A = \det A_F = -1.$$

7. (a) Vi har att villkoren i uppgiften ger att

$$\begin{pmatrix} R_{n+1} \\ K_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{30} & \frac{1}{15} \\ -\frac{14}{3} & \frac{47}{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_n \\ K_n \end{pmatrix} =: A \begin{pmatrix} R_n \\ K_n \end{pmatrix}.$$

Rekursivt får vi då att

$$\begin{pmatrix} R_n \\ K_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} R_0 \\ K_0 \end{pmatrix}.$$

så matrisen A är den som eftersöks.

(b) Låt $\mathbf{v}_1 = \binom{1}{7}$ och $\mathbf{v}_2 = \binom{1}{10}$. Dessa är egenvektorer till A och vi får speciellt att

$$\begin{aligned} A^n\mathbf{v}_1 &= 0.9^n\mathbf{v}_1 \\ A^n\mathbf{v}_2 &= 1.1^n\mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

Varje vektor $\mathbf{x}$ kan skriva som

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2, \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

Speciellt gäller det att

$$\begin{pmatrix} R_0 \\ K_0 \end{pmatrix} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2,$$

för några reella tal c_1 och c_2. Vi får då att

$$\begin{pmatrix} R_n \\ K_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} R_0 \\ K_0 \end{pmatrix} = A^n(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1 \cdot 0.9^n\mathbf{v}_1 + c_2 \cdot 1.1^n\mathbf{v}_2.$$

Om det finns exakt 7 gånger så många kaniner som rävar från början så betyder det att $\binom{R_0}{K_0}$ är en multipel av $\mathbf{v}_1$ och därmed är $c_2 = 0$. Det ger att populationen ges av

$$c_1 \cdot 0.9^n\mathbf{v}_1$$

och den kommer alltså att minska med 10% varje år för båda arterna och det kommer fortsatt att vara 7 gånger så många kaniner som rävar.

Om det inte finns exakt 7 gånger så många kaniner som rävar så är $c_2 \neq 0$ så då kommer till slut (för tillräckligt stora n) termen $c_2 \cdot 1.1^n\mathbf{v}_2$ att dominera vilket betyder en 10-procentig ökning varje år för båda arterna samt 10 gånger så många kaniner som rävar.

8. Alla vektorer i planet kommer att vara oförändrade så dessa är egenvektorer med egenvärdet 1. De vektorer som är vinkelräta mot planet avbildas på nollvektorn så dessa har egenvärdet 0. Summerar vi så är alltså $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ tre linjärt oberoende egenvektorer med egenvärdena 1, 1 och 0. Några fler finns det inte, eftersom vi bara kan ha högst tre linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$.