MATEMATIK, Chalmers Tekniska Hgskola
Tentamen i Matematik IT, del B (TMA245b) 2002-12-19.

Lösningar:

1. Spegling i linjen $y = x$ avbildar $\mathbf{e}_x$ på $\mathbf{e}_y$ och vice versa, så den har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Projektion på x-axeln lämnar $\mathbf{e}_x$ totalt oberörd och krossar $\mathbf{e}_y$ totalt så den har matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Den sökta mtarisen är alltså

$$C = BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Om Q är en godtycklig punkt i planet så gäller att avståndet från P till planet ges av längden av den ortogonala projektionen, $\overrightarrow{QP}_{\mathbf{n}}$, av $\overrightarrow{QP}$ på normalen till planet.

Vi väljer $Q = (-4, 0, 0)$. Då är $\overrightarrow{QP} = (5\ 1\ 1)^t$ och $\mathbf{n} = (1/\sqrt{14})(1\ 2\ 3)^t$ är en normerad normalvektor. Det sökta avståndet blir då

$$\left|\overrightarrow{QP}_{\mathbf{n}}\right| = \left|(\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{QP})\mathbf{n}\right| = \left|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{QP}\right| = \frac{1}{\sqrt{14}}(5 + 2 + 3) = \frac{10}{\sqrt{14}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{7}}.$$

3. Vi bestämmer de två vektorerna

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{P_3P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{v} = \overrightarrow{P_3P_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

som spänner upp planet. En normal till planet ges då av

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

vilket ger att planet har en ekvation på formen $x - y + d = 0$. För att bestämma d sätter vi in t ex punkten P_3 och får $-1 + d = 0$ och slutligen alltså att ekvationen är

$$x - y + 1 = 0.$$

4. (a) Vi får totalmatrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1-a & a & 2 \\ 0 & 0 & a^2 & a+1 \end{pmatrix}.$$

Denna är redan på övertriangulär form och vi ser att vi får unik lösning förutom de fall då $1-a=0$ och $a^2=0$, d v s då $a \notin \{0,1\}$. För $a=1$ blir de två sista ekvationerna identiska och vi får alltså oändligt många lösningar. I fallet $a=0$ blir däremot sista ekvationen $0=1$ så då saknas det lösningar. Svaret är alltså: om och endast om $a=0$.

(b) Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och får

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -(1+a) & a-3 & 1 \\ 1 & 2-a+a^2 & 3 & 2-a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1-a & a & 2 \\ 0 & -a+a^2 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1-a & a & 2 \\ 0 & 0 & a^2 & a+1 \end{pmatrix}.$$

Detta är samma matris som i första deluppgiften så svaret blir det samma.

5. Vi beräknar en diagonalisering av A för att lätt kunna beräkna den höga potensen.

Vi beräknar egenvärdena till A genom att lösa

$$0 = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1/2-\lambda & -3/2 \\ -3/2 & 1/2-\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\left((1-2\lambda)^2 - 9\right),$$

som har lösningen $2\lambda = 1 \pm 3$, d v s $\lambda = -1$ respektive $\lambda = 2$.

Motsvarande egenvektorer får vi genom att lösa ekvationssystemen

$$\begin{pmatrix} 1/2-(-1) & -3/2 \\ -3/2 & 1/2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 \\ -3/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

respektive

$$\begin{pmatrix} 1/2-2 & -3/2 \\ -3/2 & 1/2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & -3/2 \\ -3/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Dessa har lösningarna $\mathbf{v}_1 = t\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ respektive $\mathbf{v}_2 = t\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. Normerar vi så får vi ON-matrisen

$$P = (\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliseringen av A blir då $A = PDP^{-1}$ där D är diagonal med -1 och 2 på diagonalen och $P^{-1} = P^t$. Till slut blir då

$$\begin{aligned} A^{1000} &= PD^{1000}P^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^{1000} & 0 \\ 0 & 2^{1000} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+2^{1000} & 1-2^{1000} \\ 1-2^{1000} & 1+2^{1000} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6. (a) Basvektorerna $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ är oförändrade och $\mathbf{f}_3$ avbildas på nollvektorn så matrisen i basen F ges av

$$A_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Matrisen för L i standardbasen ges enligt känd sats av (observera att F är en ON-matris så $F^{-1} = F^t$)

$$\begin{aligned} A &= FA_FF^{-1} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 13 & -12 & 18 \\ -12 & 45 & 6 \\ 18 & 6 & 40 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alternativet: Vi bestämmer först den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation $a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2}$. Ansätter $a_n = r^n$ vilket ger den karakteristiska ekvationen $r^2 + r - 6 = 0$ som har lösningarna -3 och 2. Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är alltså

$$h_n = c(-3)^n + d \cdot 2^n,$$

där c och d är godtyckliga konstanter.

Vi söker en partikulärlösning p_n genom att ansätta $p_n = a + bn$. Insättning i rekursionen med $a_n = p_n$ ger

$$\begin{aligned} 0 &= -(a+bn) - (a + b(n-1)) + 6(a + b(n-2)) + 11 - 4n \\ &= 4a - 11b + 11 + n(4b - 4). \end{aligned}$$

Från detta får vi $4b - 4 = 0$ och $4a - 11b + 11 = 0$ vilket ger $b = 1$ och $a = 0$ så $p_n = n$ är en partikulärlösning.

Den allmänna lösningen till rekursionen är alltså

$$a_n = h_n + p_n = c(-1)^n + d \cdot 2^n + n.$$

De två basfallen ger villkor på c och d och vi får

$$\begin{cases} 2 = a_0 = c + d + 0 = c + d \\ 0 = a_1 = -3c + 2d + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 2 - d \\ 0 = -3(2-d) + 2d + 1 = 5d - 5 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 1 \\ d = 1 \end{cases}$$

Lösningen är alltså

$$a_n = (-3)^n + 2^n + n.$$

7. Låt C_n vara antalet bilar på Centralen i början av vecka n, L_n antalet på Landvetter och U_n antalet som är uthyrda. Sätt $\mathbf{x}_n = (C_n \; L_n \; U_n)^t$. Informationen i uppgiften ger då att

$$\mathbf{x}_{n+1} = P\mathbf{x}_n = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}\mathbf{x}_n.$$

En stationär fördelning $\mathbf{v}$ måste vara en egenvektor till P med egenvärdet 1 så det är alltså en lösning till $P\mathbf{v} = \mathbf{v}$, d v s

$$\mathbf{0} = (P - I)\mathbf{v} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}\mathbf{v}.$$

Vi löser detta homogena ekvationssystem med Gausselimination och får

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -11 & 9 \\ 0 & 11 & -9 \end{pmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -14/11 \\ 0 & 1 & -9/11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Detta ger lösningarna

$$\mathbf{v} = t\begin{pmatrix} 14/11 \\ 9/11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

som efter normering med $t = 1/(14/11+9/11+1) = 11/34$ ger fördelningen

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 7/17 \\ 9/34 \\ 11/34 \end{pmatrix},$$

så exempelvis är 7/17 av samtliga bilar på kontoret på Centralen.

8. (a) Vi beräknar skalärprodukten

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 &= \mathbf{u}_1 \cdot \left(\mathbf{v}_2 - \sum_{i=1}^{2-1} \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_i}{\mid \mathbf{u}_i \mid^2}\mathbf{u}_i\right) = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mid \mathbf{u}_1 \mid^2}\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 \\ &= \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1 = 0, \end{aligned}$$

så alltså är de ortogonala.

(b) Vi gör ett induktionsbevis över $m = i+j$. Vi har ett basfall redan från första deluppgiften, nämligen $i + j = 3$ vilket är det minsta fallet då $i \neq j$. Antag att påståendet är sant för alla par (i, j) där $i+j < m$. Vi ska visa att då gäller det även för $i+j=m$. Vi kan av symmetriskäl anta att $i<j$. Vi beräknar skalärprodukten och får

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j &= \mathbf{u}_i \cdot \left(\mathbf{v}_j - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{u}_k}{\mid \mathbf{u}_k \mid^2} \mathbf{u}_k \right) \\
&= \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{u}_k}{\mid \mathbf{u}_k \mid^2} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_k \\
&= \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{u}_i = 0,
\end{aligned}$$

där den näst sista likheten följer av induktionsantagandet eftersom $i+k<i+j$ så $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_k = 0$ om $k \neq i$. Alltså är $\mathbf{u}_i$ och $\mathbf{u}_j$ ortogonala. Därmed följer det att det gäller för samtliga par (i,j).