Matematik Chalmers

Tentamen i tma245 Matematik IT den 18 december 2003, kl. 14.15-18.15

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel

Telefonvakt: Milena Anguelova, tel. 0740-450922

1. (6p) Antag att $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ är en ON-bas för planet och att $\mathbf{u} = \binom{x_1}{y_1}$ och $\mathbf{v} = \binom{x_2}{y_2}$ är två vektorer i planet. Som bekant definieras skalärprodukten av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ som
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \alpha$$
där α är vinkeln mellan de två vektorerna.

   (a) Det finns en räkneregel som säger att $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2$ eller, med andra ord, att $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^t \mathbf{v}$. Ett sätt att visa detta är att börja med fallet $x_2 = 0$, dvs att visa att
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2.$$
   Gör detta!

   (b) Man klarar sedan det allmänna fallet genom att vrida koordinatsystemet så att x-axeln blir parallell med $\mathbf{u}$, använda (a) och sedan vrida tillbaka. Man behöver då veta att om A är en vridningsmatris så gäller dels att $(A\mathbf{u}) \cdot (A\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, något som av geometriska skäl är uppenbart, dels att $(A\mathbf{u})^t (A\mathbf{v}) = \mathbf{u}^t \mathbf{v}$. Bevisa det sistnämnda.

2. (6p) Låt A vara en $n \times n$-matris. En elementär radoperation på A är en operation av någon av följande typer:

   (1) Multiplikation av en rad med en konstant $c \neq 0$.

   (2) Addition av en multipel av en rad till en annan rad.

   (3) Platsbyte mellan två rader.

   (a) Vilken effekt har var och en av dessa radoprationer på A's determinant?

   (b) Argumentera för varför ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en *entydig* lösning om och endast om $\det A \neq 0$.

3. (6p) Antag att A är en inverterbar 3×3-matris och skriv $\mathbf{u}^t$, $\mathbf{v}^t$ respektive $\mathbf{w}^t$ för A's rader (dvs så att $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är A's radvektorer på kolonnform). Låt
$$B = \left[\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})} \quad \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{w}}{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w})} \quad \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})} \right].$$
   Visa att $AB = I$ (dvs att $B = A^{-1}$).

4. (6p) Betrakta en Markovkedja med noderna 1, 2 och 3 och med övergångsmatrisen

$$M = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

(a) Antag att man väljer startnod på måfå. Vad är sannolikheten att processen befinner sig i nod 1 efter ett steg?

(b) Beräkna den stationära fördelningen.

5. (6p) Planet π i rummet har på parameterform ekvationen

$$\begin{cases} x &= & s+t \\ y &= & 1-s+2t \\ z &= & 2+s+3t \end{cases}, \quad s,t \in \mathbf{R}.$$

(a) Ange π's ekvation på normalform.

(b) Beräkna avståndet från punkten $(5,0,1)^t$ till π.

6. (9p) Betrakta planet $x - 2y + 2z = 0$.

(a) Ange en högerorienterad ON-bas $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ sådan att två av dess vektorer ligger i det angivna planet och den tredje är normalvektor till planet.

(b) Ange matrisen för den linjära avbildning som ges av spegling i planet.

(c) Om du har räknat rätt i (b) har du fått en symmetrisk matris som svar. Faktum är att varje speglingsmatris är symmetrisk. Varför är det så?

7. (6p) Linjen L och planet π ges av

$$\begin{cases} x &= & 1-2t \\ y &= & 1+t \\ z &= & 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}$$

respektive

$$3x - 3y + z = 2.$$

(a) I vilken punkt skär L och π varandra?

(b) Vilken är vinkeln mellan L och π?

8. (5p) En 3×3-matris A har egenvärdena 2, 1 och -1 med egenvektorer $(1,1,0)^t$, $(1,-1,1)^t$ respektive $(1,-1,2)^t$. Bestäm A.

/Johan Jonasson

Lösningar

1. (a) Om x_1 är positiv gäller att $|\mathbf{u}| = x_1$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ och $\cos\alpha = x_1/\sqrt{x_2^2 + y_2^2}$, varför $|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\alpha = x_1x_2$ som önskat. I fallet då x_1 är negativ får man $|\mathbf{u}| = -x_1$ men tecknet kompenseras av cosinus för mellanliggande vinkel också ändrar tecken i detta fall.

   (b) $(A\mathbf{u}^t)(A\mathbf{v}) = \mathbf{u}^tA^tA\mathbf{v} = \mathbf{u}^t\mathbf{v}$ som önskat, där den sista likheten följer av att A är en vridningsmatris och därmed symmetrisk varför $A^t = A^{-1}$.

2. (1) ändrar determinanten med samma faktor, (2) lämnar determinanten oförändrad och (3) byter tecken på determinanten. Man kan alltid reducera A till en triangulär matris, T, m.hj.a. elementära radoperationer och enligt vad vi nyss konstaterade gäller att $\det A = 0$ om och endast om $\det T = 0$. Men $\det T \neq 0$ om och endast om alla dess diagonalelement är nollskilda och det är i precis detta fall som man kan finna en entydig lösning till motsvarande ekvationssystem.

3. Elementen utanför huvuddiagonalen i AB blir 0 tack vare att vektorprodukten av två vektorer alltid är ortogonal mot dem bägge. För att visa att elementen på huvuddiagonalen är 1 räcker det att analysera element 1 på rad 1 och konstatera att analysen av de övriga är helt analog. Element 1 på rad 1 i AB är

$$\frac{\mathbf{u}^t(\mathbf{v}\times\mathbf{w})}{\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})} = \frac{\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})}{\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})} = 1.$$

4. Låt $x_i(t)$ vara sannolikheten att slumpvandringen befinner sig i tillstånd i vid tiden t. Då är enligt uppgift $\mathbf{x}(0) = [1/3, 1/3, 1/3]^T$ varför $\mathbf{x}(1) = M^T\mathbf{x}(0) = [1/4, 1/3, 5/12]^T$ ur vilket vi utläser att sannolikheten att befinna sig i tillstånd 1 vid tiden 1 är $1/4$.

   Den stationära fördelningen ges, om den existerar, av den egenvektor till M^T som hör till egenvärdet 1. För att kolla existensen kollar vi så att övriga egenvärden ligger strikt mellan -1 och 1 och löser därför:

$$\det(M^T - \lambda I) = -\lambda^3 + \frac{3}{2}\lambda^2 - \frac{13}{24}\lambda + \frac{1}{24} = 0.$$

   Denna ekvation har lösningarna 1 och $1/4 \pm 1/\sqrt{48}$ och vi kan konstatera att den stationära fördelningen verkligen existerar.

   Egenvektorn till egenvärdet 1 fås nu genom att lösa ekvationssytemet $(M^T - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ och fås, exempelvis via Gausseliminering, till $s[3, 4, 6]^T$, $s \in \mathbf{R}$. För att få en sannolikhetsfördelning väljer vi s till $1/13$ och får att den stationära fördelningen blir $\mathbf{x} = [3/13, 4/13, 6/13]^T$.

5. Ur uttrycket för planet utläses direkt att två vektorer i planet är $\mathbf{u} = [1, -1, 1]^t$ och $\mathbf{v} = [1, 2, 3]^t$. En normalvektor fås genom att ta vektorprodukten av dessa två:

$$\mathbf{n} = [-5, -2, 3]^t$$

och ekvationen för planet på normalform blir alltså

$$-5x - 2y + 3z = D.$$

Här ska D väljas så att planet ligger pä ”rätt nivå”, dvs så att det verkligen innehåller någon punkt som vi vet ska finnas med. En sådan punkt får vi genom att ta $s = t = 0$ och får då att $[0, 1, 2]^t$ ska finnas i planet ur vilket vi snabbt beräknar D till 4. Planets ekvation blir alltså

$$-5x - 2y + 3z = 4.$$

Avståndet från en punkt P till planet ges av längden av projektionen av en vektor med fot i planet och spets i P, på planets normalvektor. I vårt fall finns punkten $[0, 1, 2]^t$ i planet och $P = [5, 0, 1]^t$ så vektorn vi ska projicera blir $[5, 0, 1]^t - [0, 1, 2]^t = [5, -1, -1]^t$. Projektionen ges av

$$\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n} = \frac{13}{19}\mathbf{n} = \frac{13}{19}[-5, -2, 3]^t$$

så längden av den blir

$$\frac{13}{19}\sqrt{5^2 + 2^2 + 3^2} = \frac{26}{\sqrt{38}}.$$

6. Planet har normalvektor $[1, -2, 2]^t$, så tag $\mathbf{f}_1 = [1/3, -2/3, 2/3]^t$, normalvektorn normaliserad. Nu gäller det bara att finna två enhetsvektorer som är ortognala mot $\mathbf{f}_1$ och sinsemellan ortogonala (dessa kommer automatiskt att finnas i planet) och se till att sätta dem i rätt ordning så att systemet blir högerorienterat. Två sådana vektorer är $\mathbf{f}_2 = [2/3, -1/3, -2/3]^t$ och $\mathbf{f}_3 = [2/3, 2/3, 1/3]^t$ (där $\mathbf{f}_3$ exempelvis kan fås via vektorprodukten av $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$. Systemet blir då automatiskt högerorienterat.)

   Med koordinater i $\mathbf{f}$-basen blir speglinsmatrisen uppenbarligen

$$A_F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   varför den i standardbasen blir $A = FA_FF^{-1} = FA_FF^t$ där matrisen F har vektorerna $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$ som kolonner. Detta ger efter visst beräkningsarbete

$$A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Del (c): För en speglingsmatris A gäller att $A^2\mathbf{x} = \mathbf{x}$ för alla $\mathbf{x}$ (spegelbilden av spegelbilden är ju ursprungsbilden) varför $A^2 = I$, dvs $A^{-1} = A$. Men A är ju en ON-matris så $A^{-1} = A^t$ så $A = A^t$, dvs A är symmetrisk.

7. Om man sätter in uttrycket för L is π's ekvation får man att

$$3(1-2t)-3(1+t)+3t=2$$

ur vilket man löser ut $t=-1/3$, dvs skärningspunkten svarar mot $t=-1/3$ i uttrycket för L. Detta talar om för oss att skärningspunkten är $[5/3,2/3,-1]^t$.

För att beräkna vinkeln mellan planet och L noterar vi att om låter α vara vinkeln mellan L och planets normalvektor blir den sökta vinkeln $\pi/2-|\alpha|$. (Belopp kring α för att justera för vad som händer om vi råkar välja normal åt "fel håll".) En normalvektor till planet är $\mathbf{n}=[3,-3,1]^t$ och en riktningsvektor till L är $\mathbf{v}=[-2,1,3]^t$. så

$$\cos\alpha=\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{v}||\mathbf{n}|}=\frac{-6}{\sqrt{266}}$$

och vi får att den sökta vinkeln är

$$\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{6}{\sqrt{266}}.$$

8. Vi använder att en 3×3-matris A med tre linjärt oberoende egenvektorer kan skrivas som $A=PDP^{-1}$ där P har A's egenvektorer som kolonner och D är en diagonalmatris med egenvärdena på huvuddiagonalen i motsvarande ordning. Enligt uppgift är $D=diag(2,1,-1)$ och

$$P=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\0&1&2\end{bmatrix}.$$

Tyvärr är P inte en ON-matris varför inversen får beräknas genom att man via Gausseliminering överför matrisn $(P|I)$ på $(I|P^{-1})$. Detta ger att

$$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&0\\2&-2&-2\\-1&1&2\end{bmatrix}$$

varför

$$A=PDP^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}5&-1&-4\\-1&5&4\\4&-4&-6\end{bmatrix}.$$