Appendix

Existens av Brownsk rörelse

Vi har i optionskurserna ofta utnyttjat att det finns en modell för Brownsk rörelse med kontinuerliga trajektorier. I detta appendix ges ett bevis för denna egenskap.

Sats 1 (Wieners sats) *Det finns en centrerad Gaussprocess* $(W(t))_{0\leq t\leq 1}$ *med kovariansfunktionen*

$$E\left[W(s)W(t)\right] = \min(s,t)$$

som har kontinuerliga trajektorier med sannolikheten ett.

För att visa Wieners sats inleder vi med en diskussion om Gaussiska processer med ändlig tidsparametermängd. Antag att $(X_i)_{i=1}^n$ är en reellvärd centrerad Gaussisk process och låt

$$c_{ij} = E\left[X_i X_j\right],\ i,j = 1,...,n$$

vara motsvarande kovariansmatris (dvs kovariansfunktion). Matrisen $C = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ är symmetrisk eftersom

$$E\left[X_i X_j\right] = E\left[X_j X_i\right].$$

Matrisen C är också positivt semi-definit ty om $a = (a_1,...,a_n) \in \mathbf{R}^n$ gäller att

$$a^* C a = \sum_{i,j=1}^n a_i c_{ij} a_j = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j E\left[X_i X_j\right]$$

$$= E\left[\sum_{i,j=1}^n a_i a_j X_i X_j\right] = E\left[(\sum_{i=1}^n a_i X_i)^2\right] \geq 0.$$

Antag nu omvänt att $C = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ är en matris med reella element sådan att C är symmetrisk och positivt semi-definit. Vi skall visa att det finns en centrerad reellvärd Gaussisk process med tidsparametermängden $\{1, 2, .., n\}$ och kovariansmatrisen C. För att se detta använder vi spektralsatsen för symmetriska matriser och får en ON-bas

$$e_1 = (e_{11}, ..., e_{n1}), ..., e_n = (e_{1n}, ..., e_{nn})$$

i $\mathbf{R}^n$ bestående av egenvektorer för C. Låt $\lambda_1, ..., \lambda_n$ vara motsvarande egenvärden. Eftersom

$$e_i^* C e_i = \lambda_i, \ i = 1, ..., n$$

så är $\lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$. Relationen $Ce_k = \lambda_k e_k$ kan skrivas

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_{i\nu} e_{\nu k} = \lambda_k e_{ik}$$

och vi får

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_{i\nu} e_{\nu k} e_{jk} = \lambda_k e_{ik} e_{jk}.$$

Eftersom den matris som bildas av egenvektorerna som kolonner är en ortogonalmatris så måste denna matris också ha ortogonala rader dvs

$$\sum_{k=1}^{n} e_{\nu k} e_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{om } \nu \neq j \\ 1, & \text{om } \nu = j \end{cases}.$$

Alltså är

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{ik} e_{jk} = \sum_{\nu=1}^{n} c_{i\nu} \left(\sum_{k=1}^{n} e_{\nu k} e_{jk} \right) = c_{ij}.$$

Låt nu $(G_i)_{i=1}^n$ vara en i.i.d. där $G_1 \in N(0, 1)$ och definiera

$$X_i = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\lambda_k} e_{ik} G_k, \ i = 1, ..., n.$$

Processen $(X_i)_{i=1}^n$ är en reellvärd centrerad Gaussisk process och

$$E[X_i X_j] = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{ik} e_{jk} = c_{ij}.$$

Processen $(X_i)_{i=1}^n$ har alltså kovariansmatrisen C. Genom att byta bokstäver får vi att

$$X_t = \sum_{k=1}^{n} a_k(t) G_k$$

där $a_k(t) = \sqrt{\lambda_k} e_{tk}$ och $t = 1, ..., n$. Det visar sig att Wienerprocessen har en liknande representation som dock beror av oändligt många stokastiskt oberoende slumpkällor.

Antag $(G_n)_{n \in \mathbf{N}}$ är en i.i.d. med $N(0,1)$-fördelade komponenter (vi förutsätter existensen av denna i.i.d.). Med tanke på ovanstående är det naturligt att ansätta

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) G_n, \ \ 0 \leq t \leq T$$

för lämliga kontinuerliga funktioner a_n, $n \in \mathbf{N}$, som uppfyller

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2(t) < \infty, \ \ 0 \leq t \leq T.$$

Den serie som definierar $W(t)$ för fixt t konvergerar i $L^2(P)$. Notera att

$$\min(s,t) = E\left[W(s)W(t)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s) a_n(t).$$

Detta får oss att tänka på Fourierutvecklingar i ortogonalsystem. Antag $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ är en ortonormerad bas för $L^2\left[0,1\right]$. För varje fixt $t \geq 0$ Fourierutvecklas funktionen $1_{[0,t]}$ i den ortonormerade basen $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ så att

$$1_{[0,t]} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) e_n$$

där vi nu definierar

$$a_n(t) = \int_0^1 1_{[0,t]}(x) e_n(x) dx, \ n \in \mathbf{N}.$$

Eftersom

$$\int_0^{\infty} 1_{[0,s]} 1_{[0,t]} d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s) a_n(t)$$

blir

$$\min(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s) a_n(t).$$

Den ortonormerade basen $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ skall nu väljas så att slumpserien

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) G_n, \ \ 0 \leq t \leq T$$

är lätt att hantera med avseende på likformig konvergens i tidsvariabeln t.

Sätt först

$$h(t) = 1_{\left[0,\frac{1}{2}\right[}(t) - 1_{\left[\frac{1}{2},1\right]}(t),\ t \in \mathbf{R}.$$

Vi definierar nu $h_{00}(t) = 1,\ 0 \leq t \leq 1$, och för varje $n \geq 1$ och $j = 1, ..., 2^{n-1}$ sätts

$$h_{jn}(t) = 2^{\frac{n-1}{2}} h(2^{n-1}t - j + 1),\ 0 \leq t \leq 1.$$

För varje $n \geq 1$ och $j = 1, ..., 2^{n-1}$ gäller alltså

$$h_{jn}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}},\ \frac{j-1}{2^{n-1}} \leq t < \frac{j-\frac{1}{2}}{2^{n-1}}, \\ \\ -2^{\frac{n-1}{2}},\ \frac{j-\frac{1}{2}}{2^{n-1}} \leq t \leq \frac{j}{2^{n-1}}, \\ \\ 0, \text{ för övrigt i } [0,1]. \end{cases}$$

Härav inses lätt att funktionerna $h_{00,}h_{jn}, j = 1, ..., 2^{n-1},\ n \geq 1$, som tillhör $L^2[0,1]$, alla har längden ett och är parvis ortogonala. Vi påstår att dessa funktioner bildar en ortonormerad bas i $L^2[0,1]$. Antag nämligen att $f \in L^2[0,1]$ är ortogonal mot var och en av funktionerna ifråga. För varje $n \geq 1$ och $j = 1, ..., 2^{n-1}$ följer då att

$$\int_{\frac{j-1}{2^{n-1}}}^{\frac{j-\frac{1}{2}}{2^{n-1}}} f d\nu = \int_{\frac{j-\frac{1}{2}}{2^{n-1}}}^{\frac{j}{2^{n-1}}} f d\nu$$

och därmed är

$$\int_{\frac{j-1}{2^{n-1}}}^{\frac{j}{2^{n-1}}} f d\nu = \frac{1}{2^{n-1}} \int_0^1 f d\nu = 0$$

ty

$$\int_0^1 f d\nu = \int_0^1 f h_{00} d\nu = 0.$$

Alltså är

$$\int_{\frac{j}{2^{n-1}}}^{\frac{k}{2^{n-1}}} f d\nu = 0,\ 1 \leq j \leq k \leq 2^{n-1},$$

och därmed gäller att

$$\int_0^1 1_{[a,b]} f d\nu = \int_a^b f d\nu = 0,\ 0 \leq a \leq b \leq 1.$$

Alltså måste $f = 0$ och vi kan dra slutsatsen att funktionerna $h_{00,} h_{jn}, j = 1, ..., 2^{n-1}$, $n \geq 1$, är en ortonormerad bas i $L^2 [0, 1]$. Denna ortonormerade bas kallas för Haarbasen i Hilbertrummet $L^2 [0, 1]$.

Låt nu $G_{00,} G_{jn}, j = 1, ..., 2^{n-1}$, $n \geq 1$, vara en i.i.d. med $N(0, 1)$-fördelade komponenter och sätt

$$a_{jn}(t) = \int_0^1 1_{[0,t]} h_{jn} d\nu, \; j = n = 0 \text{ eller } j = 1, ..., 2^{n-1}, n \geq 1.$$

Funktionerna a_{jn}, $j = n = 0$ eller $j = 1, ..., 2^{n-1}, n \geq 1$, är alla kontinuerliga. Observera också att för varje fixt $n \geq 1$ och $t \in [0, 1]$ så är

$$a_{jn}(t) \neq 0 \text{ för högst ett index } j.$$

Vi inför också

$$U_0(t) = G_{00} a_{00}(t)$$

och

$$U_n(t) = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} G_{jn} a_{jn}(t), \; n \geq 1$$

och vet från diskussionen ovan att slumpserien

$$V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t)$$

konvergerar i $L^2(P)$ för varje fixt $t \in [0, 1]$ och att motsvarande process är en normaliserad Brownsk rörelse i tidsintervallet $[0, 1]$. Det gäller att visa att processens trajektorier är kontinuerliga med sannolikheten ett. Vi visar därför att serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n$$

konvergerar n.s. i Banachrummet $C([0, 1])$ med normen

$$\| x \|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} | x(t) | = \max_{t \in [0,1] \cap \mathbf{Q}} | x(t) | .$$

Här syftar n.s. på det bakomliggande sannolikhetsmåttet. Det räcker därför att visa att

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| U_n \|_\infty < \infty, \text{ n.s.}$$

ty en absolutkonvergent serie i Banachrummet $C([0,1])$ är konvergent. Låt därför $n \geq 1$ och notera först att

$$P\left[\| U_n \|_\infty > 2^{-\frac{n}{4}}\right] \leq P\left[\max_{1\leq j\leq 2^{n-1}} (| G_{jn} | \| a_{jn} \|_\infty) > 2^{-\frac{n}{4}}\right].$$

Men

$$\| a_{jn} \|_\infty = \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}}$$

så

$$P\left[\| U_n \|_\infty > 2^{-\frac{n}{4}}\right] \leq 2^{n-1} P\left[| G_{00} | > 2^{\frac{n}{4}+\frac{1}{2}}\right].$$

Eftersom

$$x \geq 1 \Rightarrow P[| G_{00} | \geq x] \leq 2\int_x^\infty y e^{-y^2/2} \frac{dy}{x\sqrt{2\pi}} \leq e^{-x^2/2}$$

följer att

$$P\left[\| U_n \|_\infty > 2^{-\frac{n}{4}}\right] \leq 2^n e^{-2^{n/2}}$$

och vi drar slutsatsen att

$$E\left[\sum_{n=0}^{\infty} 1_{\left[\| U_n \|_\infty > 2^{-\frac{n}{4}}\right]}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} P\left[\| U_n \|_\infty > 2^{-\frac{n}{4}}\right] < \infty.$$

Serien $\sum_{n=0}^{\infty} 1_{\left[\| U_n \|_\infty > 2^{-\frac{n}{4}}\right]}$ är således ändlig n.s. och det följer att serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| U_n \|_\infty$$

konvergerar n.s. Det finns alltså en representation $W(t)$, $0 \leq t \leq 1$, för normaliserad endimensionell Brownsk rörelse i tidsintervallet $[0,1]$ som har kontinuerliga trajektorier. Detta visar Wieners sats. []

Antag att processerna $(W_1(t))_{0\leq t\leq 1}$ och $(W_2(t))_{0\leq t\leq 1}$ är stokastiskt oberoende, endimensionella Brownska rörelser i tidsintervallet $[0,1]$ båda med trajektorier som är kontinuerliga med sannolikheten ett. Genom att sätta

$$W(t) = \begin{cases} W_1(t), \ 0 \leq t \leq 1 \\ W_1(1) + tW_2(1/t) - W_2(1), \ t > 1 \end{cases}.$$

får vi en normaliserad endimensionell Brownsk rörelse i tidsintervallett $[0,\infty[$. Processens trajektorier är kontinuerliga med sannolikheten ett.