1. Paley-Wiener-Zygmunds stokastiska integral

I den inledande kursen Optioner och matematik studerades aktiederivat där den underliggande aktien beskrivs enligt Bachelier-Samuelsons modell, vilket bl a innebär att aktiepriset har konstant volatilitet σ. Antag vi begränar oss till tidsintervallet $[0,T]$. Aktiepriset $S(t)$ vid tiden t ges då av ekvationen

$$S(t) = S(0)e^{\alpha t+\sigma W(t)},\ 0 \leq t \leq T$$

där α är en reell parameter och $W = (W(t))_{0\leq t\leq T}$ är en normaliserad Wienerprocess i tidsintervallet $[0,T]$. Den stokastiska processen $W = (W(t))_{0\leq t\leq T}$ är alltså en reellvärd, centrerad Gaussprocess med kovariansen

$$E\left[W(s)W(t)\right] = \min(s,t).$$

En normaliserad, reellvärd Wienerprocess har alltid en version med kontinuerliga trajektorier så vi kan nedan utan inskränkning förutsätta att alla trajektorier för W är kontinuerliga.

Black-Scholes modell består av en aktie med en prisprocess som i Bachelier-Samuelsons modell och en obligation med prisprocessen

$$B(t) = B(0)e^{rt},\ 0 \leq t \leq T$$

där $B(0)$ och r är positiva konstanter. Vi skriver $g \in \mathcal{P}$ om funktionen $g :]0,\infty[\to \mathbf{R}$ är styckvis kontinuerlig och

$$\mid g(e^x) \mid \leq B\exp(C \mid x \mid),\ x \in \mathbf{R}$$

för lämpliga konstanter $B, C > 0$. Ett derivat av europeisk typ som utbetalar beloppet $g(S(T))$ slutdagen T har vid tiden $t \leq T$ värdet $v(t, S(t))$, där

$$v(t,s) = e^{-r(T-t)}E\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma W(T-t)})\right].$$

En portfölj bestående av ett derivat och $-v'_s(t, S(t))$ aktier är riskfri vid tiden t. Från kursen Optioner och matematik vet vi också att funktionen $v(t,s)$ löser Black-Schooles differentialekvation

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + rs\frac{\partial v}{\partial s} - rv(t,s) = 0,\ t < T,\ s > 0$$

med slutvärdet

$$v_{|t=T} = g.$$

Om $t < u < T$ och vi vill beräkna $v(t, s)$ så kan vi uppfatta derivatet som ett europeiskt derivat som utbetalar beloppet $v(u, S(u))$ slutdagen u. Genom att för fixt $\tau > 0$ definiera en linjär operator

$$\Pi^\tau : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$$

där

$$(\Pi^\tau g)(s) = e^{-r\tau} E\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma W(\tau)})\right].$$

så följer nämligen att

$$\Pi^{\tau_1} \circ \Pi^{\tau_0} = \Pi^{\tau_1 + \tau_0}.$$

Banker och andra säljare av warranter och optioner kan hedga sina positioner med hjälp av Black-Scholes optionsmodell. I praktiken skattas regelbundet volatiliteten för de underliggande värdepapperen och hedgingen justeras därefter. Volatiliteten för ett aktiepris är i själva verket ytterst svår att mäta men trots detta har Black-Scholes optionsmodell varit extremt uppmärksammad och använd alltsedan sin tillkomst i början av 1970-talet.

I detta kapitel skall vi studera optionsmodeller där volatiliteten är en deterministisk funktion av tiden. Detta leder oss till en stokastisk integral av typen

$$\int_0^T \sigma(t) dW(t)$$

där $\sigma(t)$, $0 \leq t \leq T$, är deterministisk. Denna stokastiska integral studerades av Paley, Wiener och Zygmund redan år 1933 $[PWZ]$. Motsvarande integralbegrepp leder oss också till en del stokastiska differentialekvationer, som bl a är intressanta i samband med stokastisk ränta. Samtidigt skapas en bra bakgrund för att senare utveckla Itôs allmännare stokastiska integralbegrepp, som är ett utmärkt hjälpmedel för att vidareutveckla Black-Scholes modell. Begreppet stokastisk volatilitet är dock ett ämne som nästan helt faller utom ramen för denna kurs.

Nedan diskuteras först en del resultat från integrations- och sannolikhetsteorin. Dessa resultat återkommer i ett senare kapitel och får då en djupare innebörd.

Antag att $f \in L^2[0, T]$ dvs f är en kvadratiskt integrerbar deterministisk funktion i intervallet $[0, T]$. Det gäller alltså att

$$\int_0^T f^2(t) dt < \infty.$$

Sätt

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^T f^2(t)dt}.$$

Denna storhet kallas L^2-normen av f. Triangelolikheten ger att

$$\|f+g\|_2 \le \|f\|_2 + \|g\|_2$$

för alla $f, g \in L^2[0,T]$.

Om $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = T$ och

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k 1_{[t_k, t_{k+1}[}(t),\ \ 0 \le t < T$$

där $y_0, ..., y_{n-1} \in \mathbf{R}$ kallas f för en trappfunktion i intervallet $[0,T]$. För varje kvadratiskt integrerbar funktion $f \in L^2[0,T]$ finns en följd trappfunktioner $f_k,\ k \in \mathbf{N}$, som konvergerar mot f i $L^2[0,T]$ dvs

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T (f_k(t) - f(t))^2 dt = 0$$

eller

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_2 = 0.$$

En följd $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ i $L^2[0,T]$ kallas en Cauchyföljd om

$$\lim_{j,k\to\infty} \|f_j - f_k\|_2 = 0$$

och man kan visa att en sådan följd är konvergent i $L^2[0,T]$. Omvänt visar triangelolikheten att en konvergent följd i $L^2[0,T]$ är en Cauchyföljd.

I denna kurs identifieras två stokastiska variabler X och Y om

$$P[X \neq Y] = 0.$$

Här betecknar P det bakomliggande sannolikhetsmåttet. Om A_k, $k \in \mathbf{N}$, är händelser så är $\cup_{k=0}^{\infty} A_k$ en händelse och

$$P\left[\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right] \le \sum_{k=0}^{\infty} P[A_k].$$

Här råder likhet om händelserna

$$A_j \cap A_k,\ \ j \neq k$$

aldrig inträffar.

I analogi med ovanstående låter vi $L^2(P)$ beteckna klassen av alla reellvärda stokastiska variabler med ändligt andramoment. Om $X \in L^2(P)$ gäller alltså att

$$E\left[X^2\right] < \infty.$$

L^2-normen definieras av

$$\|X\|_2 = \sqrt{E\left[X^2\right]}.$$

Precis som för rummet $L^2\left[0,T\right]$ kan vi nu tala om konvergens och Cauchyföljder. En Cauchyföljd i $L^2(P)$ är konvergent. Om varje stokastisk variabel X_k, $k \in \mathbf{N}$, har en Gaussisk fördelning och denna sekvens konverger i $L^2(P)$ så har gränsvärdet en Gaussisk fördelning.

Vi är nu beredda att definiera Paley-Wiener-Zygmunds stokastiska integral. Låt $(W(t))_{0\le t\le T}$ vara en normaliserad reellvärd Wienerprocess med kontinuerliga samplefunktioner i tidsintervallet $\left[0,T\right]$. Antag först $f = 1_I$ där I är ett delintervall av intervallet $\left[0,T\right]$ med vänsterändpunkten a och högerändpunkten b. Vi definierar

$$\int_0^T f(t)dW(t) = \int_I 1dW(t) = \int_a^b 1dW(t) = W(b) - W(a).$$

Denna integral har en Gaussisk fördelning med väntevärdet noll och variansen $b-a$. Om $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = T$ och

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k 1_{[t_k,t_{k+1}[}(t),\ 0 \le t < T$$

där $y_0, ..., y_{n-1} \in \mathbf{R}$ definieras

$$\int_0^T f(t)dW(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} 1dW(t).$$

Notera att

$$E\left[\int_0^T f(t)dW(t)\right] = 0$$

och

$$E\left[\left(\int_0^T f(t)dW(t)\right)^2\right] = \sum_{k=0}^{n-1} y_k^2(t_{k+1}-t_k) = \int_0^T f^2(t)dt.$$

Alltså gäller att
$$\int_0^T f(t)dW(t) \in N(0, \int_0^T f^2(t)dt).$$

Vi skall i nästa steg definiera den stokastiska integralen

$$\int_0^T f(t)dW(t)$$

för godtyckligt $f \in L^2[0,T]$ och låter därför $f_k,\ k \in \mathbf{N}$, vara en följd trappfunktioner i intervallet $[0,T]$ sådana att

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_2 = 0.$$

Observera att
$$\|\int_0^T f_j(t)dW(t) - \int_0^T f_k(t)dW(t)\|_2^2$$
$$= E\left[\left(\int_0^T f_j(t)dW(t) - \int_0^T f_k(t)dW(t)\right)^2\right]$$
$$= E\left[\left(\int_0^T (f_j(t) - f_k(t))dW(t)\right)^2\right]$$
$$= \int_0^T (f_j(t) - f_k(t))^2 dt = \|f_j - f_k\|_2^2,\ j,k \in \mathbf{N}.$$

Triangelolikheten visar att
$$\|f_j - f_k\|_2$$
$$\leq \|f_j - f\|_2 + \|f - f_k\|_2$$
där högra ledet konvergerar mot 0 då $j,k \to \infty$, vilket medför att sekvensen

$$\int_0^T f_k(t)dW(t),\ k \in \mathbf{N}$$

är en Cauchyföljd i $L^2(P)$, som således är konvergent. Man visar lätt att gränsvärdet är oberoende av valet av följd av trappfunktioner som konvergerar mot f och gränsvärdet betecknas med

$$\int_0^T f(t)dW(t)$$

och kallas för Paley-Wiener-Zygmunds stokastiska integral. Denna stokastiska integral har en Gaussisk fördelning med väntevärdet noll och variansen

$$\int_0^T f^2(t)dt$$

dvs

$$\int_0^T f(t)dW(t) \in N(0, \int_0^T f^2(t)dt).$$

Speciellt gäller att

$$E\left[\int_0^T f(t)dW(t)\right] = 0$$

och

$$E\left[\left(\int_0^T f(t)dW(t)\right)^2\right] = \int_0^T f^2(t)dt$$

Om $f, g \in L^2[0,T]$ så följer också att

$$E\left[\left(\int_0^T (f(t)+g(t))dW(t)\right)^2\right] = \int_0^T (f(t)+g(t))^2 dt$$

dvs

$$E\left[\left(\int_0^T f(t)dW(t) + \int_0^T g(t)dW(t)\right)^2\right] = \int_0^T (f(t)+g(t))^2 dt.$$

Här är vänstra ledet lika med

$$E\left[\left(\int_0^T f(t)dW(t)\right)^2\right] + 2E\left[\int_0^T f(t)dW(t)\int_0^T g(t)dW(t)\right]$$
$$+E\left[\left(\int_0^T g(t)dW(t)\right)^2\right]$$

och högra ledet lika med

$$\int_0^T f^2(t)dt + 2\int_0^T f(t)g(t)dt + \int_0^T g^2(t)dt$$

och vi drar slutsatsen att

$$E\left[\int_0^T f(t)dW(t)\int_0^T g(t)dW(t)\right] = \int_0^T f(t)g(t)dt.$$

Om f är kvadratiskt integrerbar i intervallet $[a,b]$, där $0 \leq a \leq b \leq T$, definieras

$$\int_a^b f(t)dW(t) = \int_0^b g(t)dW(t)$$

där funktionen g är lika med 0 i intervallet $[0,a[$ och lika med f i intervallet $[a,b]$. Definitionen ger speciellt att

$$\int_a^b f(t)dW(t) = \int_a^c f(t)dW(t) + \int_c^b f(t)dW(t)$$

för alla $c \in [a,b]$.

Antag $f \in L^2[0,T]$. Ekvationen

$$X(t) = \int_0^t f(u)dW(u),\ 0 \leq t \leq T$$

definierar en centrerad Gaussisk process med kovariansfunktionen

$$E[X(s)X(t)] = E\left[\int_0^s f(u)dW(u) \int_0^t f(u)dW(u)\right].$$

Om $s \leq t$ följer att

$$E[X(s)X(t)] = E\left[\int_0^t 1_{[0,s]}(u)f(u)dW(u) \int_0^t f(u)dW(u)\right]$$

$$= \int_0^t 1_{[0,s]}(u)f(u)f(u)du = \int_0^s f^2(u)du.$$

För godtyckliga $0 \leq s,t \leq T$ följer därför att

$$E[X(s)X(t)] = \int_0^{\min(s,t)} f^2(u)du.$$

Den centrerade Gaussiska processen

$$Y(t) = W(\int_0^t f^2(u)du),\ 0 \leq t \leq T$$

har som vi ser samma kovariansfunktion och processerna $X = (X(t))_{0 \leq t \leq T}$ och $Y = (Y(t))_{0 \leq t \leq T}$ är därför ekvivalenta i fördelning. Det verkar rimligt att processen Y har kontinuerliga trajektorier. Lebesgues majorantsats, som vi diskuterar nedan i detta kapitel och mera allmänt i ett senare kapitel, visar nämligen att funktionen

$$\int_0^t f^2(u)du, \ 0 \le t \le T$$

är kontinuerlig. Genom att utnyttja att processen Y har kontinuerliga trajektorier så följer med Lebesgueintegration att processen $X = (X(t))_{0 \le t \le T}$ har en version sådan att sannolikheten för att en trajektoria $t \to X(t)$ är kontinuerlig är lika med ett. Detta innebär att det finns en stokastisk process $(X^*(t))_{0 \le t \le T}$ sådan att

$$P\left[X(t) = X^*(t)\right], \text{ alla } 0 \le t \le T$$

och en händelse A med sannolikheten ett sådan att trajektorian $t \to X^*(t,\omega)$ är kontinuerlig för varje $\omega \in A$. När vi nedan möter en stokastisk process av typen

$$X(t) = \int_0^t f(u)dW(u), \ 0 \le t \le T$$

där $f \in L^2[0,T]$ förutsätts att processen har valts i en version som har kontinuerliga samplefunktioner med sannolikheten ett. Denna konvention är synnerligen viktig i stokastisk analys.

Låt oss nu betrakta följande kapitalmarknad bestående av en aktie och en obligation. Obligationspriset $B(t)$ vid tiden $t \in [0,T]$ ges på samma sätt som i Black-Scholes modell dvs

$$B(t) = B(0)e^{rt}$$

där $B(0)$ och r är positiva konstanter. Vidare förutsätts att aktiepriset $S(t)$ vid tiden $t \in [0,T]$ ges av ekvationen

$$S(t) = S(0)e^{\alpha t + \int_0^t \sigma(u)dW(u)}$$

där $\alpha \in \mathbf{R}$ och $S(0) > 0$ är givna konstanter och där volatiliteten $\sigma \in L^2[0,T]$ är nedåt begränsad av en strikt positiv konstant. Aktiepriset sägs i detta fall ha den deterministiska volatiliteten $\sigma(t)$ vid tiden t.

Antag nu att ett enkelt europeiskt derivat slutdagen T utbetalar beloppet $g(S(T))$, där $g \in \mathcal{P}$. Det är naturligt att definiera derivatets värde vid tiden t lika med $v(t, S(t))$, där

$$v(t,s) = e^{-r\tau}E\left[g(se^{r\tau}e^{-\frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(u)du + \int_t^T \sigma(u)dW(u)})\right]$$

och $\tau = T - t$ (tänk först igenom fallet då $\sigma(t)$, $0 \leq t \leq T$, är en trappfunktion). Om vi för fixa $t < T$ definierar en linjär operator

$$\Pi^{t,T} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$$

genom att sätta

$$(\Pi^{t,T} g)(s) = e^{-r\tau} E\left[g(se^{r\tau} e^{-\frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(u)du + \int_t^T \sigma(u)dW(u)}) \right]$$

så följer att

$$\Pi^{t,u} \circ \Pi^{u,T} = \Pi^{t,T}, \ \ t < u < T.$$

Vi gör nu ytterligare en generalisering av Black-Scholes modell och antar att obligationspriset ges av ekvationen

$$B(t) = B(0) e^{\int_0^t r(u)du}$$

där räntan $r(t)$, $0 \leq t \leq T$, är deterministisk och dessutom positiv och styckvis kontinuerlig. Vi vill under dessa förutsättningar värdera ett europeiskt derivat med utbetalningsfunktionen g. Om både volatilitet och ränta är tidsberoende och deterministiska leds vi som ovan till optionspriset $v(t, S(t))$ vid tiden t, där

$$v(t,s) = e^{-\int_t^T r(u)du} E\left[g(se^{\int_t^T r(u)du} e^{-\frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(u)du + \int_t^T \sigma(u)dW(u)}) \right].$$

Med tanke på att funktionen $v(t, s)$ löser Black-Scholes differentialekvation då räntan och volatiliteten är konstanta kommer funktionen $v(t, s)$ i fallet med variabel ränta och volatilitet att i någon lämplig mening lösa följande paraboliska differentialekvation, nämligen

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2(t)s^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + r(t)s\frac{\partial v}{\partial s} - r(t)v(t,s) = 0.$$

Om vi för fixt definierar en linjär operator

$$\Pi^{t,T} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$$

genom att sätta

$$(\Pi^{t,T} g)(s) = e^{-\int_t^T r(u)du} E\left[g(se^{\int_t^T r(u)du} e^{-\frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(u)du + \int_t^T \sigma(u)dW(u)}) \right]$$

så följer att

$$\Pi^{t,u} \circ \Pi^{u,T} = \Pi^{t,T},\ t < u < T.$$

Ovan har aktiens log-pris driften αt. Om α är en deterministisk trapp-funktion i intervallet $[0, t]$ och aktiens log-pris har driften

$$\int_0^t \alpha(u)du$$

dvs

$$S(t) = S(0)e^{\int_0^t \alpha(u)du + \int_0^t \sigma(u)dW(u)}$$

så inses som ovan att optionspriset inte förändras. Man kan också visa att driften kan ha stokastiska beroenden utan att optionsformeln ändras men vi går inte in på detta ämne här.

Exempel 1. Vi skall värdera en aktieköpoption med lösenpris K och slutdag T då både ränta och volatilitet är tidsberoende och deterministiska. Sätt

$$a = \int_t^T r(u)du - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(u)du$$

och

$$b = \sqrt{\int_t^T \sigma^2(u)du}.$$

Kom ihåg att

$$\int_t^T \sigma(u)dW(u) = -bG$$

där $G \in N(0, 1)$. Alltså är

$$E\left[\max(0, se^{\int_t^T r(u)du}e^{-\frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(u)du + \int_t^T \sigma(u)dW(u)} - K)\right] = E\left[\max(0, se^{a-bG} - K)\right]$$

$$= E\left[se^{a-bG} - K; G \leq \frac{1}{b}(\ln\frac{s}{K} + a)\right]$$

$$= se^{a+\frac{1}{2}b^2}\Phi(\frac{1}{b}(\ln\frac{s}{K} + b^2 + a)) - K\Phi(\frac{1}{b}(\ln\frac{s}{K} + a))$$

och det följer att

$$c(t, s, K; T) = s\Phi(d_1) - Ke^{-\int_t^T r(u)du}\Phi(d_2)$$

där

$$d_1 = \frac{\ln \frac{s}{K} + \int_t^T r(u)du + \frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(u)du}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(u)du}}$$

och

$$d_2 = \frac{\ln \frac{s}{K} + \int_t^T r(u)du - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(u)du}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(u)du}}.$$

[]

Vi diskuterar närmast en del rent matematiska aspekter på Paley-Wiener-Zygmunds integral. Ovan definieras Paley-Wiener-Ziegmunds integral som ett gränsvärde i $L^2(P)$. För en stor klass av integrander kan integralen i själva verket definieras trajektorievis.

Sats 1. *Antag* $f : [0,T] \to \mathbf{R}$ *är en kontinuerligt deriverbar deterministisk funktion. Det gäller att*

$$\int_0^T f(t)dW(t) = f(T)W(T) - \int_0^T f'(t)W(t)dt.$$

Beviset för sats 1 beror på flera olika typer av konvergens som man ofta möter inom sannolikhetsteorin.

En följd $(X_k)_{k\in\mathbf{N}}$ av stokastiska variabler sägs konvergera i sannolikhet om det finns en stokastisk variabel X sådan att

$$\lim_{k\to\infty} P\,[\mid X_k - X \mid \geq \varepsilon] = 0, \text{ alla } \varepsilon > 0$$

dvs

$$\lim_{k\to\infty} E\left[\frac{\mid X_k - X \mid}{1+ \mid X_k - X \mid}\right] = 0$$

(ekvivalensen följer av olikheterna

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} P\,[\mid Y \mid \geq \varepsilon] \leq E\left[\frac{\mid Y \mid}{1+ \mid Y \mid}\right] \leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + P\,[\mid Y \mid \geq \varepsilon]\,, \ \varepsilon > 0$$

genom att sätta $Y = X_k - X$). Vi skriver detta $X_k \to X$ i $L^0(P)$ då $k \to \infty$. Konvergens i sannolikhet och konvergens i $L^0(P)$ är alltså likvärda begrepp. Det visar sig att gränsvärdet X blir entydigt bestämt. Antag nämligen att sekvensen ovan har två gränsvärden X' och X''. Om $\varepsilon > 0$ och händelsen

$$[\mid X' - X'' \mid > \varepsilon]$$

inträffar så måste händelsen

$$[\mid X' - X_k \mid > \varepsilon/2] \cup [\mid X_k - X'' \mid > \varepsilon/2]$$

inträffa för varje $k \in \mathbf{N}$. Alltså är

$$P\left[\mid X' - X'' \mid > \varepsilon\right]$$

$$\leq P\left[\mid X' - X_k \mid > \varepsilon/2\right] + P\left[\mid X_k - X'' \mid > \varepsilon/2\right]$$

och genom att låta $k \to \infty$ följer att

$$P\left[\mid X' - X'' \mid > \varepsilon\right] = 0.$$

Alltså är

$$P\left[\mid X' - X'' \mid > 0\right] = P\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\mid X' - X'' \mid > 1/n\right]\right]$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} P\left[\mid X' - X'' \mid > 1/n\right] = 0$$

och vi har visat att $X' = X''$.

Konvergens i $L^2(P)$ medför konvergens i sannolikhet, vilket följer av Markovs olikhet

$$P\left[\mid Y \mid > \varepsilon\right] \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E\left[Y^2\right],\ \varepsilon > 0$$

en olikhet som visades i kursen Optioner och matematik.

Vi skall nu definiera så kallad nästan säker konvergens. Låt därför $(X_k)_{k \in \mathbf{N}}$ vara en följd av stokastiska variabler sådana att händelsen

$$\lim_{k \to \infty} X_k(\omega) \text{ existerar ändligt}$$

har sannolikheten ett. Vi säger i detta fall att sekvensen $(X_k)_{k \in \mathbf{N}}$ konvergerar nästan säkert eller med sannolikheten ett. Om dessutom $\mid X_k \mid \leq Y$ där

$$E\left[Y\right] < \infty$$

så ger Lebesgues majorantsats att

$$\lim_{k\to\infty} E\left[X_k\right] = E\left[\lim_{k\to\infty} X_k\right].$$

Lebesgues majorantsats är den viktigaste konvergenssatsen i hela matematiken och den kommer att belysas ytterligare i nästa kapitel.

Av Lebesgues majorantsats drar vi slutsatsen att nästan säker konvergens medför konvergens i sannolikhet. Låt nämligen en sekvens stokastiska variabler $(X_k)_{k\in\mathbf{N}}$ konvergera med sannolikheten ett mot en stokastisk variabel X. Det gäller att

$$\frac{\mid X_k - X \mid}{1+ \mid X_k - X \mid} \leq 1$$

och Lebesgues majorantsats ger

$$\lim_{k\to\infty} E\left[\frac{\mid X_k - X \mid}{1+ \mid X_k - X \mid}\right] = E\left[\lim_{k\to\infty} \frac{\mid X_k - X \mid}{1+ \mid X_k - X \mid}\right] = 0$$

varför $X_k \to X$ i $L^0(P)$ då $k \to \infty$.

Bevis av sats 1. Låt n vara ett positivt heltal och

$$t_k = \frac{kT}{n},\ \ k = 0, 1, ..., n$$

så att

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)(W(t_{k+1}) - W(t_k)) = f(T)W(T) - \sum_{k=0}^{n-1} W(t_{k+1})(f(t_{k+1}) - f(t_k)).$$

Vi skriver för varje fixt $k \in \{0, ..., n-1\}$

$$f(t_{k+1}) - f(t_k) = (f'(t_{k+1}) + \varepsilon_k)(t_{k+1} - t_k)$$

och får

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)(W(t_{k+1}) - W(t_k))$$

$$= f(T)W(T) - \sum_{k=0}^{n-1} W(t_{k+1})(f'(t_{k+1}) + \varepsilon_k)(t_{k+1} - t_k)$$

$$= f(T)W(T) - \sum_{k=0}^{n-1} W(t_{k+1})f'(t_{k+1})(t_{k+1}-t_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k W(t_{k+1})(t_{k+1}-t_k).$$

Observera att

$$\max_{k\in\{0,\ldots,n-1\}} \mid \varepsilon_k \mid \to 0$$

då $n \to \infty$. Vidare gäller att

$$\sum_{k=0}^{n-1} W(t_{k+1})f'(t_{k+1})(t_{k+1}-t_k) \to \int_0^T W(t)f'(t)dt$$

för alla ω då $n \to \infty$. Denna konvergens gäller alltså även i sannolikhet. Vidare gäller att

$$\mid \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k W(t_{k+1})(t_{k+1}-t_k) \mid \leq T \max_{k\in\{0,\ldots,n-1\}} \mid \varepsilon_k \mid \max_{t\in[0,T]} \mid W(t) \mid$$

där uttrycket i högra ledet konvergerar mot noll för alla ω då $n \to \infty$. Denna konvergens gäller därmed även i sannolikhet. Då slutligen

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)(W(t_{k+1}) - W(t_k))$$

konvergerar mot

$$\int_0^T f(t)dW(t)$$

i $L^2[0,T]$ och därmed i sannolikhet så följer sats 1.

En stokastisk process $a = (a(t))_{0\leq t\leq T}$ sägs vara en adapterad kontinuerlig process om det finns en händelse A med sannolikheten ett så det för varje $\omega \in A$ gäller att trajektorian $a(t,\omega)$, $0 \leq t \leq T$ är kontinuerlig och sådan att $a(t,\omega)$ är en tillräckligt "snäll" funktion av Wienerprocessens trajektoria $(W(u,\omega))_{0\leq u\leq t}$ i intervallet $[0,t]$ för varje $t \in [0,T]$. Begreppet "snäll" kan vi inte definiera ännu. Den precisa innebörden kommer att bli helt klar längre fram. Antag nu att $a = (a(t))_{0\leq t\leq T}$ är en sådan process. Vi skriver

$$dX(t) = a(t)dt,\ 0 \leq t \leq T$$

om $(X(t))_{t\in[0,T]}$ är en stokastisk process sådan att

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(u)du$$

för alla $t \in [0,T]$ med sannolikheten ett. Antag dessutom att $b \in L^2[0,T]$. Vi skriver

$$dX(t) = a(t)dt + b(t)dW(t),\ 0 \le t \le T$$

om

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(u)du + \int_0^t b(u)dW(u)$$

för alla $t \in [0,T]$ med sannolikheten ett och vi säger i detta fall att processen $(X(t))_{t\in[0,T]}$ har den stokastiska differentialen

$$dX(t) = a(t)dt + b(t)dW(t).$$

Om den deterministiska funktionen $c(t)$, $0 \le t \le T$, är kontinuerlig definieras

$$c(t)dX(t) = c(t)a(t)dt + c(t)b(t)dW(t),\ 0 \le t \le T$$

och

$$\int_0^t c(u)dX(u) = \int_0^t c(u)a(u)du + \int_0^t c(u)b(u)dW(u),\ 0 \le t \le T.$$

Om återigen

$$dX(t) = a(t)dt + b(t)dW(t),\ 0 \le t \le T$$

och

$$X(t) - X(0) = \int_0^t a(u)du + \int_0^t b(u)dW(u) = 0$$

för alla $t \in [0,T]$ med sannolikheten ett så kan man visa att $b = 0$ i $L^2[0,T]$ dvs $\int_0^T b^2(t)dt = 0$ och att processen a har trajektorier som är identiskt noll med sannolikheten ett.

Antag funktionen $f : [0,T] \to \mathbf{R}$ är kontinuerligt deriverbar. Sats 1 visar att

$$f(t)W(t) = \int_0^t f'(u)W(u)du + \int_0^t f(u)dW(u)$$

för fixt t. Eftersom varje term i denna relation är kontinuerlig i t med sannolikheten ett så kan man visa att relationen i fråga är sann för alla $t \in [0,T]$ med sannolikheten ett. Det gäller alltså att

$$d(f(t)W(t)) = f'(t)W(t)dt + f(t)dW(t),\ 0 \le t \le T$$

Antag återigen att

$$dX(t) = a(t)dt + b(t)dW(t),\ 0 \le t \le T$$

med samma villkor på a och b som ovan och att funktionen $f : [0, T] \to \mathbf{R}$ är kontinuerligt deriverbar. En liten modifiering av beviset för sats 1 visar att

$$f(t)X(t) - f(0)X(0) = \int_0^t f'(u)X(u)du + \int_0^t f(u)dX(u)$$

för fixt t och det följer att

$$d(f(t)X(t)) = f'(t)X(t)dt + f(t)dX(t),\ 0 \le t \le T.$$

Om funktionen $g : [0, T] \to \mathbf{R}$ är kontinuerligt deriverbar och $Y(t) = g(t)X(t)$, $0 \le t \le T$, så följer också att

$$d(f(t)Y(t)) = f'(t)Y(t)dt + f(t)dY(t),\ 0 \le t \le T.$$

Vi kan nu studera en del stokastiska differentialekvationer. Som ett exempel antags att α och β är kontinuerliga funktioner i intervallet $[0, T]$ och att $\sigma \in L^2[0, T]$. Vi vill lösa den stokastiska differentialekvationen

$$dX(t) = (\alpha(t) + \beta(t)X(t))dt + \sigma(t)dW(t),\ 0 \le t \le T$$

med begynnelsevärdet x_0. Ekvationen skrivs på formen

$$dX(t) - \beta(t)X(t)dt = \alpha(t)dt + \sigma(t)dW(t)$$

och vi hittar lätt en integrerande faktor

$$e^{-F(t)}$$

där

$$F(t) = \int_0^t \beta(u)du.$$

Efter multiplikation med den integrerande faktorn kan ekvationen skrivas

$$d(e^{-F(t)}X(t)) = \alpha(t)e^{-F(t)}dt + \sigma(t)e^{-F(t)}dW(t)$$

och eftersom $X(0) = x_0$ blir

$$e^{-F(t)}X(t) = x_0 + \int_0^t \alpha(u)e^{-F(u)}du + \int_0^t \sigma(u)e^{-F(u)}dW(u)$$

eller

$$X(t) = e^{F(t)}(x_0 + \int_0^t \alpha(u)e^{-F(u)}du + \int_0^t \sigma(u)e^{-F(u)}dW(u)).$$

Stokastiska differentialekvationer förekom tidigt inom fysik. Langevins klassiska stokastiska differentialekvation beskriver hastigheten för en liten partikel med massan m i en vätska som dels påverkas av en friktionskraft enligt Stokes lag dels påverkas av de omgivande molekylernas stötkrafter (se t ex $[NEL]$). Första komponenten $V(t)$ av hastighetsvektorn uppfyller ekvationen

$$mdV(t) = -\beta V(t)dt + \sigma dW(t)$$

där $\beta > 0$ och $\sigma > 0$ är reella parametrar. Ekvationen kan lösas som ovan. Av

$$dV(t) + \frac{\beta}{m}V(t)dt = \frac{\sigma}{m}dW(t)$$

dvs

$$d(e^{\frac{\beta}{m}t}V(t)) = \frac{\sigma}{m}e^{\frac{\beta}{m}t}dW(t)$$

följer genom integration att

$$V(t) = e^{-\frac{\beta}{m}t}V(0) + \frac{\sigma}{m}\int_0^t e^{-\frac{\beta}{m}(t-u)}dW(u).$$

Om $V(0) = v$ är känt blir

$$E\left[V(t)\right] = e^{-\frac{\beta}{m}t}v$$

och om $s \leq t$ följer att

$$\mathrm{Cov}(V(s), V(t)) = E\left[\frac{\sigma}{m}\int_0^t 1_{[0,s]}(u)e^{-\frac{\beta}{m}(s-u)}dW(u)\frac{\sigma}{m}\int_0^t e^{-\frac{\beta}{m}(t-u)}dW(u)\right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{m^2}\int_0^t 1_{[0,s]}(u)e^{-\frac{\beta}{m}(s-u)}e^{-\frac{\beta}{m}(t-u)}du = \frac{\sigma^2}{m^2}e^{-\frac{\beta}{m}(s+t)}\int_0^s e^{\frac{2\beta}{m}u}du$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\beta m}(e^{-\frac{\beta}{m}(t-s)} - e^{-\frac{\beta}{m}(s+t)}).$$

För stora a och godtyckliga $s, t \geq 0$ gäller alltså att

$$E\left[V(s+a)V(t+a)\right] \approx \frac{\sigma^2}{2\beta m}e^{-\frac{\beta}{m}|s-t|}.$$

Efter en lämplig skaländring av tid och rum får vi därför i gränsen då $a \to \infty$ en stationär normaliserad Ornstein-Uhlenbeckprocess dvs en centrerad reellvärd Gaussprocess $(U(t))_{t\in\mathbf{R}}$ med kovariansen

$$e^{-\frac{1}{2}|s-t|}.$$

Inom ränteteori möter vi gott om stokastiska differentialekvationer. Innan vi diskuterar konkreta exempel ger vi en del begrepp och definitioner från detta område. Betrakta först en så kallad nollkupongsobligation med lösendag T och nominellt värde 1 dvs ett kontrakt som slutdagen T ger innehavaren beloppet 1. Detta värdepapper kallas här en T-obligation. Vi betecknar obligationspriset vid tiden t med $p(t,T)$ och skriver

$$p(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)}.$$

Storheten $R(t,T)$ kallas för $(T-t)$-räntan vid tiden t (jmfr begrepp såsom korta räntan, halvårsräntan, 5-årsräntan osv). Kurvan

$$y = R(t,T),\ T \geq t$$

kallas för avkastningskurvan vid tiden t.

Antag $t \leq T < U$ och låt $R(t,T,U)$ beteckna räntan för perioden $[T,U]$ kontrakterad vid tiden t. Kravet på arbitagefrihet medför att

$$p(t,U) = p(t,T)e^{-R(t,T,U)(U-T)}$$

vilket inses av följande tabell.

tid	t	T	U
handling	sälj en T-obligation köp $\frac{p(t,T)}{p(t,U)}$ st U-obligationer		
kassaflöde	0	-1	$\frac{p(t,T)}{p(t,U)}$

Vi får alltså att

$$R(t,T,U) = \frac{U-t}{U-T}R(t,U) - \frac{T-t}{U-T}R(t,T).$$

Den momentana forwardräntan $f(t,T)$ vid tiden T sedd från tidpunkten t definieras av gränsvärdet

$$f(t,T) = \lim_{U\to T} R(t,T,U)$$

dvs

$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln p(t,T)}{\partial T}$$

och det följer under lämpliga regularitetsförutsättningar att

$$p(t,U) = p(t,T)e^{-\int_T^U f(t,u)du}, \ t \leq T \leq U.$$

Den korta räntan $r(t)$ vid tiden t definieras av ekvationen

$$r(t) = f(t,t).$$

Antag beloppet $B(0)$ vid tiden 0 placeras i en obligation med närmast omedelbar inlösen och att det vid lösen utbetalade beloppet omedelbart placeras i en obligation med närmast omedelbar inlösen osv. Kapitalet $B(t)$ vid tiden t blir då

$$B(t) = B(0)e^{\int_0^t r(u)du}.$$

Observera att

$$dB(t) = r(t)B(t)dt.$$

Vi kan alternativt tänka oss att $B(t)$ representerar banksaldot vid tiden t om beloppet $B(0)$ satts i banken vid tiden 0.

Den så kallade HJM-modellen, som fått namn efter upptäckarna Heath, Jarrow och Morton $[HJM]$, utgår från forwardräntorna och postulerar att

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t), \ 0 \leq t \leq T$$

för lämpliga α och σ. Om σ är stokastisk får vi en stokastisk differentialekvation av Itôs typ, som vi ännu inte behandlat. I många implementeringar är dock σ deterministisk.

De så kallade korträntemodellerna postulerar att $p(t,T) = F(t,r(t),T)$ är en deterministisk funktion av t och korta räntan $r(t)$ för varje T samt att korta räntan framkommer som lösningen till en lämplig stokastisk differentialekvation. Här finns många populära modeller och vi nämner i detta kapitel endast tre.

Variabeln i en tidsberoende parameter i följande korträntemodeller markeras explicit.

(1) $dr(t) = (b - ar(t))dt + \sigma dW(t)$ $(a, b, \sigma > 0)$
(2) $dr(t) = \Theta(t)dt + \sigma dW(t)$ $(\sigma > 0)$
(3) $dr(t) = (\Theta(t) - ar(t))dt + \sigma dW(t)$ $(a, \sigma > 0)$.

Var och en av dessa diffusionsekvationer är lätta att lösa som vi redan sett ovan.

I samband med korträntemodeller, liksom för HJM-modellen, förutsätts att marknaden är abitragefri. Den senare teorin kommer att visa att det är naturligt att byta sannolikhetsmått och ersätta det fysikaliska måttet P med ett så kallat martingalmått Q. Det är därför nödvändigt att i en sådan här kurs gå in på en del måtteori. Om W är en normaliserad Brownsk rörelse relativt martingalmåttet Q kallas (1) för Vasičeks modell, (2) för Ho-Lees modell och (3) för Hull-Whites modell.

Det finns en stor begränsning med Paley-Wiener-Zygmunds integral. Om en stokastisk process $(X(t))_{t\in[0,T]}$ har en stokastisk differential i den mening vi ovan gett detta begrepp så behöver inte processen $(X^2(t))_{t\in[0,T]}$ ha en stokastisk differential av samma slag. Analogt gäller att log-priset i Bachelier-Samuelsons aktieprismodell har en stokastisk differential men aktiepriset har ingen stokastisk differential i ovanstående mening. Vi kommer senare att se att Itôs stokastiska differentialbegrepp inte har samma begränsningar.

Det är ofta naturligt att studera system av stokastiska differentialekvationer. Langevins klassiska stokastiska differentialekvation för en liten partikels hastighet är ett sådant exempel. I samband med HJM:s forwardräntemodell är det naturligt att ha flera drivande Wienerprocesser. Det är därför intressant att Paley-Wiener-Zygmunds integralbegrepp lätt går att generalisera till Brownsk rörelse i n dimensioner.

En stokastisk process $W = (W(t))_{0\le t\le T} = (W_1(t), ..., W_n(t))_{0\le t\le T}$, där processerna

$$(W_1(t))_{0\le t\le T}, (W_2(t))_{0\le t\le T}, ..., (W_n(t))_{0\le t\le T}$$

är stokastiskt oberoende normaliserade Wienerprocesser i tidsintervallet $[0,T]$ kallas en normaliserad $\mathbf{R}^n$-värd Wienerprocess eller Brownsk rörelse i tidsintervallet $[0,T]$. Vi skriver $f \in L^2([0,T];\mathbf{R}^n)$ om $f(t) = (f_1(t), ..., f_n(t))$, $0 \le t \le T$, där $f_k \in L^2[0,T]$ för $k = 1, ..., n$ och definierar Paley-Wiener-Zygmunds integral

$$\int_0^T f(t)dW(t) = \sum_{k=1}^n \int_0^T f_k(t)dW_k(t).$$

Definitionen medför att denna stokastiska integral har en centrerad Gaussisk fördelning. Om $j \neq k$ så är

$$E\left[\int_0^T f_j(t)dW_j(t) \int_0^T f_k(t)dW_k(t)\right]$$

$$= E\left[\int_0^T f_j(t)dW_k(t)\right] E\left[\int_0^T f_k(t)dW_k(t)\right] = 0$$

varför

$$E\left[(\int_0^T f(t)dW(t))^2\right] = \sum_{j,k=1}^{n} E\left[\int_0^T f_j(t)dW_j(t)\int_0^T f_k(t)dW_k(t)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E\left[(\int_0^T f_k(t)dW_k(t))^2\right] = \sum_{k=1}^{n}\int_0^T f_k^2(t)dt = \int_0^T \sum_{k=1}^{n} f_k^2(t)dt.$$

Om vi utnyttjar standardbeteckningen

$$\mid x \mid = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}, \text{ om } x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$$

så följer alltså att

$$E\left[(\int_0^T f(t)dW(t))^2\right] = \int_0^T \mid f(t) \mid^2 dt.$$

Om $f, g \in L^2([0, T]\,; \mathbf{R}^n)$, där $f(t) = (f_1(t), ..., f_n(t))$ och $g(t) = (g_1(t), ..., g_n(t))$, så följer också att

$$E\left[\int_0^T f(t)dW(t)\int_0^T g(t)dW(t)\right] = \int_0^T f(t)\cdot g(t)dt$$

där multiplikationstecknet i den senare integralen syftar på den vanliga skalärprodukten i $\mathbf{R}^n$ dvs

$$x\cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \text{ om } x = (x_1, ..., x_n),\ y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Antag nu att $0 \le a \le b$ och att den $\mathbf{R}^n$-värda funktionen $f = (f_1, ..., f_n)$ är kvadratiskt integrerbar i intervallet $[a, b]$ dvs

$$\int_a^b \mid f(t) \mid^2 dt < \infty.$$

Vi definierar i detta fall

$$\int_a^b f(t)dW(t) = \sum_{k=1}^{n}\int_a^b f_k(t)dW_k(t)$$

och det följer att

$$\int_a^b f(t)dW(t) = \int_a^c f(t)dW(t) + \int_c^b f(t)dW(t)$$

om $c \in [a,b]$.

Sats 2. *Antag* $g \in L^2([0,T];\mathbf{R}^n)$ *och att* $\mid g(t) \mid = 1$ *för alla* $0 \le t \le T$. *Sätt*

$$V(t) = \int_0^t g(u)dW(u),\ 0 \le t \le T.$$

Processen V *är en reellvärd, normaliserad Brownsk rörelse i tidsintervallet* $[0,T]$ *och*

$$\int_0^T f(u)dV(u) = \int_0^T f(u)g(u)dW(u)$$

för varje $f \in L^2[0,T]$.

Bevis. Vi vet redan att V är en reellvärd, centrerad Gaussisk process med tidsparametermängden $[0,T]$. Vidare gäller för $s \le t$ att kovariansen

$$E[V(s)V(t)] = E\left[\int_0^t 1_{[0,s]}(u)g(u)dW(u)\int_0^t g(u)dW(u)\right]$$

$$= \int_0^t 1_{[0,s]}(u)g(u)\cdot g(u)du = \int_0^s g(u)\cdot g(u)du = \int_0^s 1du = s$$

vilket visar att V är en normaliserad Brownsk rörelse i intervallet $[0,T]$.

Vi visar nu formeln

$$\int_0^T f(u)dV(u) = \int_0^T f(u)g(u)dW(u)$$

för varje $f \in L^2[0,T]$. Här följer fallet $f = 1_{[a,b[}$ direkt från definitionen av V och därmed även fallet då f är en trappfunktion. Allmänna fallet erhålls genom approximation med trappfunktioner. []

Exempel 4. Antag W är en n-dimensionell, normaliserad Wienerprocess och antag två värdepappers prisprocesser beskrivs av ekvationerna

$$S_k(t) = S_k(0)e^{\alpha_k t + \int_0^t \sigma_k(u)dW(u)},\ 0 \le t \le T$$

där $\alpha_k \in \mathbf{R}$ och $\sigma_k \in L^2([0,T];\mathbf{R}^n)$ för $k = 1, 2$. Vi vill värdera optionen att få byta värdepapper 2 mot värdepapper 1 vid tidpunkten T. Optionen utbetalar alltså beloppet $\max(0, S_1(T) - S_2(T))$ vid tiden T.

Denna option behandlas med fördel genom att uppfatta en andel av värdepapper 2 som prisenhet. Det första värdepapperet får då prisprocessen

$$S(t) = \frac{S_1(t)}{S_2(t)},\ 0 \leq t \leq T$$

och det andra värdepappret får prisprocessen

$$B(t) = 1,\ 0 \leq t \leq T.$$

Notera att

$$S(t) = S(0)e^{(\alpha_1 - \alpha_2)t + \int_0^t (\sigma_1(u) - \sigma_2(u))dW(u)},\ 0 \leq t \leq T.$$

Sätt $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$. Vi antar fr o m nu att funktionen $\mid \sigma(t) \mid$, $0 \leq t \leq T$, är nedan begränsad av en positiv konstant. Om vi definierar

$$V(t) = \int_0^t \frac{\sigma(u)}{\mid \sigma(u) \mid} dW(u),\ 0 \leq t \leq T$$

så följer av sats 2 att V är en normaliserad Brownsk rörelse i intervallet tidsintervallet $[0, T]$ och

$$S(t) = S(0)e^{(\alpha_1 - \alpha_2)t + \int_0^t |\sigma(u)| dV(u)},\ 0 \leq t \leq T.$$

I vår nya prisenhet utbetalar optionen $\max(0, S(T) - 1)$ slutdagen T. Optionens värde kan nu bestämmas med hjälp av exempel 1 där räntan konvergerat mot 0. Uttyckt i den nya prisenheten blir optionsvärdet vid tiden t lika med

$$S(t)\Phi(\frac{\ln S(t) + \frac{1}{2}\int_t^T \mid \sigma(u) \mid^2 du}{\sqrt{\int_t^T \mid \sigma(u) \mid^2 du}}) - \Phi(\frac{\ln S(t) - \frac{1}{2}\int_t^T \mid \sigma(u) \mid^2 du}{\sqrt{\int_t^T \mid \sigma(u) \mid^2 du}}).$$

Uttryckt i den ursprungliga prisenheten blir optionspriset vid tiden t lika med

$$S_1(t)\Phi(\frac{\ln \frac{S_1(t)}{S_2(t)} + \frac{1}{2}\int_t^T \mid \sigma(u) \mid^2 du}{\sqrt{\int_t^T \mid \sigma(u) \mid^2 du}}) - S_2(t)\Phi(\frac{\ln \frac{S_1(t)}{S_2(t)} - \frac{1}{2}\int_t^T \mid \sigma(u) \mid^2 du}{\sqrt{\int_t^T \mid \sigma(u) \mid^2 du}}).$$

[]

En reellvärd adapterad kontinuerlig process relativt en n-dimensionell Wienerprocess definieras nästan som i fallet $n = 1$ med den enda skillnaden att Wienerprocessen nu har sina värden i $\mathbf{R}^n$. Antag att

$$a = (a(t))_{t\in[0,T]} = (a_1(t), ..., a_m(t))_{t\in[0,T]}$$

är en $\mathbf{R}^m$-värd stokastisk process där komponenterna är adapterade kontinuerliga stokastiska processer. Vi skriver som i tidigare matematikkurser

$$\int_0^t a(u)du = (\int_0^t a_1(u)du, ..., \int_0^t a_m(u)du)$$

och uppfattar en vektor i $\mathbf{R}^m$ som en kolonnmatris. Det är naturligt att definiera

$$dX(t) = a(t)dt$$

om $(X(t))_{t\in[0,T]}$ är en stokastisk process sådan att

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(u)du$$

för alla $t \in [0, T]$ med sannolikheten ett. Antag nu dessutom att $b \in L^2([0, T]\,; \mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$ dvs för matrisen

$$b = (b_{jk})_{1\leq j\leq m, 1\leq k\leq n}$$

gäller att den j:te raden $b_j \in L^2([0, T]\,; \mathbf{R}^n)$. Låt W betecknar en normaliserad Wienerprocess $\mathbf{R}^n$. Vi skriver

$$dX(t) = a(t)dt + b(t)dW(t),\ 0 \leq t \leq T$$

om

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(u)du + \int_0^t b(u)dW(u)$$

för alla $t \in [0, T]$ med sannolikheten ett och säger i detta fall att processen $(X(t))_{t\in[0,T]}$ har den stokastiska differentialen

$$dX(t) = a(t)dt + b(t)dW(t).$$

Antag A och B är matriser av typen $m \times m$ med reella element och $\sigma \in L^2([0,T];\mathbf{R}^m,\mathbf{R}^n)$. Den stokastiska differentialekvationen

$$dX(t) = (A + BX(t))dt + \sigma(t)dW(t),\ 0 \leq t \leq T$$

med begynnelse värdet $x_0 \in \mathbf{R}^m$ kan lösas med integrerande faktor. Ekvationen skrivs på formen

$$dX(t) - BX(t)dt = Adt + \sigma(t)dW(t)$$

och vi hittar en integrerande faktor

$$e^{-Bt} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-t)^i}{i!} B^i.$$

Efter multiplikation med denna kan differentialekvationen skrivas

$$d(e^{-Bt}X(t)) = e^{-Bt}Adt + e^{-Bt}\sigma(t)dW(t)$$

och eftersom $X(0) = x_0$ blir

$$e^{-Bt}X(t) = x_0 + \int_0^t e^{-Bu}Adu + \int_0^t e^{-Bu}\sigma(u)dW(u)$$

eller

$$X(t) = e^{Bt}(x_0 + \int_0^t e^{-Bu}Adu + \int_0^t e^{-Bu}\sigma(u)dW(u)).$$

Övningar

1. Antag $\sigma \geq 1$ och betrakta ekvationen

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2 s^2}{2(T-t)} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} = 0,\ t < T,\ s > 0$$

med slutvillkoret

$$v(T,s) = 0,\ s > 0.$$

Visa att ekvationen löses av funktionen

$$v(t,s) = A(T-t)^{\sigma^2} s^2$$

för varje reellt tal A.

2. Antag $X = 2W(\frac{1}{3}) - W(\frac{1}{2}) + 3W(\frac{3}{4})$. a) Skriv X som en stokastisk integral. b) Bestäm variansen av X.

3. Vilken fördelning har den stokastiska variabeln $\int_0^T W(t)dt$?

4. Antag $a \in \mathbf{R}$ och
$$X(t) = \int_0^t e^{-\frac{a}{2}(t-u)} dW(u),\ t \geq 0.$$
Bestäm processens kovarians.

5. Betrakta den stokastiska differentialekvationen
$$\begin{cases} dX(t) = dt + tdW(t) \\ X(0) = 0. \end{cases}$$
Visa att lösningen $(X(t))_{t\geq 0}$ är en Gaussprocess och bestäm dess kovarians.

6. Betrakta den stokastiska differentialekvationen
$$\begin{cases} dX(t) = W(t)dt + tdW(t) \\ X(0) = 0. \end{cases}$$
Visa att lösningen $(X(t))_{t\geq 0}$ är en centrerad Gaussprocess och bestäm dess kovarians.

7. Antag $x \in \mathbf{R}$ och låt $(X_x(t))_{t\geq 0}$ beteckna lösningen till ekvationen
$$\begin{cases} dX(t) = -\frac{1}{2}X(t)dt + dW(t) \\ X(0) = x,\ t \geq 0. \end{cases}$$
a) Bestäm kovariansen för processen $(X_x(t))_{t\geq 0}$. b) Antag $G \in N(0,1)$ och antag dessutom att G och $(X_x(t))_{t\geq 0}$ är stokastiskt oberoende. Sätt $Y(t) = X_G(t)$, $t \geq 0$. Bestäm kovariansen för processen $(Y(t))_{t\geq 0}$.

8. Antag $W = (W_1, W_2)$ är en normaliserad Brownsk rörelse i planet. Visa att processen
$$\int_0^t \cos u\ dW_1(u) + \int_0^t \sin u\ dW_2(u),\ t \geq 0$$
är en reellvärd normalisead Brownsk rörelse på linjen.

9. Antag A och B är matriser av typen $n \times n$ och $AB = BA$. Visa att $e^A e^B = e^B e^A$.

10. Antag $a, b, \sigma, r_0 > 0$ och

$$dr(t) = (b - ar(t))dt + \sigma dW(t) \ \ 0 \leq t \leq T$$

där $r(0) = r_0$ och W är en 1-dimensionell Wienerprocess. Beräkna $E\left[r(t)\right]$ och

$$E\left[e^{-\int_0^t r(u)du}\right].$$