10. Black-Scholes modell för flera underliggande aktier

Finansiella derivat kan bero på flera underliggande aktier. Typiska exempel utgöres av aktieindexoptioner och aktieindexterminer där index bestäms från en föreskriven grupp (korg) av aktier. Om indexvärdet uppfattas som en endimensionell geometrisk Brownsk rörelse med exponentiell drift så vi är tillbaka till den situation vi redan behandlat. Det förekommer också optioner av icke-standardiserad form, som naturligt leder till flerdimenstionell stokastisk analys. Ett enkelt exempel, som redan behandlades i kursen Optioner och matematik, representeras av optionen att få byta en given aktie mot en annan aktie ett fixt framtida datum. Optionen på minimum (eller maximum) av flera värdepapperspriser har också ofta diskuterats i litteraturen. I boken $[J2]$ sammanställs flera intressanta artiklar om exotiska optioner.

Låt $(W_1(t), ..., W_n(t))$, $t \geq 0$, vara en normaliserad $\mathbf{R}^n$-värd Wienerprocess dvs processerna

$$(W_k(t))_{t\geq 0},\ \ k = 1, ..., n$$

är stokastiskt oberoende normaliserade reellvärda Wienerprocesser. Här uppfattas $(W_1(t), ..., W_n(t))$ som en kolonnmatris med n rader dvs

$$(W_1(t), ..., W_n(t)) = \begin{bmatrix} W_1(t) \\ W_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ W_n(t) \end{bmatrix}.$$

Processen

$$(W_1(t), ..., W_n(t)), 0 \leq t \leq T$$

kallas för en n-dimensionell normaliserad Wienerprocess i tidsintervallet $[0, T]$. Om $c = [c_1 ... c_n]$ är en radmatris med reella element blir processen

$$X(t) = cW(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k W_k(t),\ \ t \geq 0.$$

en centrerad Gaussisk process med kovariansen

$$E\left[X(s)X(t)\right] = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 E\left[W_k(s)W_k(t)\right] = \mid c \mid^2 \min(s, t)$$

dvs processen $(X(t))_{t\geq 0}$ är en centrerad reellvärd Wienerprocess. Den är normaliserad om c är en enhetsvektor.

Antag vi har n st aktier, numrerade från 1 till n, där den i:te aktien har priset $S_i(t)$ vid tiden t. Vi inför vektorpriset

$$S(t) = (S_1(t), ..., S_n(t))$$

vid tiden t och tolkar detta som en kolonnmatris dvs

$$S(t) = \begin{bmatrix} S_1(t) \\ . \\ . \\ . \\ S_n(t) \end{bmatrix}.$$

Man säger att vektorpriset $(S(t))_{t\geq 0}$ beskriver en geometrisk Brownsk rörelse med exponentiell drift om det existerar en normaliserad Wienerprocess i $W(t) = (W_1(t), ..., W_n(t))$, $t \geq 0$, i $\mathbf{R}^n$ så att

$$S_i(t) = S_i(0)e^{\alpha_i t + \sigma_i W(t)},\ i = 1, ..., n$$

där $\alpha_{1,...,}\alpha_n \in \mathbf{R}$, och där $\sigma_1, ..., \sigma_n$ bildar raderna i den så kallade volatilitets-matrisen

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} .....\sigma_{1n} \\ ..... \\ ..... \\ \sigma_{n1} .....\sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

som förutsätts vara icke-singulär. Syftet med detta kapitel är att gå igenom en del stokastisk analys i flera dimensioner och därefter tillämpa teorin i samband med några aktiederivat, som beror av flera aktiepriser.

Låt $(W(t))_{0\leq t\leq T} = ((W_1(t), ..., W_n(t)))_{0\leq t\leq T}$ vara en normaliserad $\mathbf{R}^n$-värd Wienerprocess i tidsintervallet $[0, T]$ med kontinuerliga trajektorier. Det underliggande sannolikhetsrummet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ förutsätts vara komplett. Vi antar det är givet en familj av σ-algebror $\mathcal{F}_t$, $t \in [0, T]$, av delmängder av Ω sådan att

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F},\ s \leq t$$

och så att

$$A \in \mathcal{F}_0 \text{ om } A \in \mathcal{F} \text{ och } P(A) = 0.$$

Vi antar också att

$$\sigma(W(u);\ \ u \leq t) \subseteq \mathcal{F}_t$$

där

$$\mathcal{F}_t \text{ och } \sigma(W(u) - W(t);\ t \leq u \leq T)\text{äar stokastiskt oberoende}$$

för alla $0 \leq t \leq T$.

En reellvärd stokastisk process $f = (f(t))_{0 \leq t \leq T}$ sägs vara progressivt mätbar om avbildningen

$$(u, \omega) \to f(u, \omega),\ (u, \omega) \in [0, t] \times \Omega$$

är $(\mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{F}_t)$-mätbar för varje fixt $t \in [0, T]$. Antag $1 \leq p < \infty$. En matris $f = (f_{ik})$ av reellvärda progressivt mätbara funktioner sägs tillhöra klassen $\mathcal{L}_{loc}^p[0, T]$ om

$$\int_0^T \mid f_{ik}(t) \mid^p dt < \infty \text{ n.s., alla } i, k.$$

Råkar $f \in \mathcal{L}_{loc}^p[0, T]$ vara begränsad n.s. säger vi att f tillhör klassen $\mathcal{L}_{loc}^\infty[0, T]$. Vi uppfattar här f som 0 så snart

$$\int_0^T \mid f_{ik}(t) \mid dt = 0 \text{ n.s., alla } i, k.$$

Nedan betecknar $\mathcal{L}^p[0, T]$ klassen av alla $f \in \mathcal{L}_{loc}^p[0, T]$ sådana att

$$E\left[\int_0^T \mid f_{ik}(t) \mid^p dt\right] < \infty,\ \text{alla } i, k.$$

Om $f = (f_{ij})$ är en $m \times n$-matris av funktioner tillhörande $\mathcal{L}_{loc}^2[0, T]$ definieras den stokastiska integralen

$$\int_0^T f(t) dW(t)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n \int_0^T f_{1k}(t) dW_k(t), ..., \sum_{k=1}^n \int_0^T f_{mk}(t) dW_k(t)\right).$$

I fortsättningen förutsätts att alla processer av typen

$$\int_0^t f(u) dW(u),\ 0 \leq t \leq T$$

där $f \in \mathcal{L}^2_{loc}[0,T]$ är givna i en version med kontinuerliga trajektorier n.s. Vi definierar också

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)dW(t) = \int_0^{t_2} f(t)dW(t) - \int_0^{t_1} f(t)dW(t),\ 0 \le t_1 \le t_2 \le T.$$

Råkar $f \in \mathcal{L}^2[0,T]$ följer att

$$E\left[\mid \int_{t_1}^{t_2} f(t)dW(t) \mid^2\right] = \sum_{i=1}^{m} E\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2} f_{ik}(t)dW_k(t)\right)^2\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} E\left[\int_{t_1}^{t_2} f_{ik}^2(t)dt\right] = E\left[\int_{t_1}^{t_2} \mid f(t) \mid^2 dt\right], 0 \le t_1 \le t_2 \le T$$

där

$$\mid f(t) \mid^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f_{ik}^2(t).$$

Vi kan nu definiera stokastiska differentialer av vektorvärda processer. Antag att matriserna $a \in \mathcal{L}^1_{loc}[0,T]$ och $b \in \mathcal{L}^2_{loc}[0,T]$ är av typen $m \times 1$ respektive $m \times n$. Om en $\mathbf{R}^m$-värd stokastisk process $(X(t))_{t\in[0,T]}$ uppfyller

$$X(t) - X(0) = \int_0^t a(u)du + \int_0^t b(u)dW(u),\ \text{ alla } 0 \le t \le T$$

med sannolikheten ett skriver vi

$$dX(t) = a(t)dt + b(t)dW(t)$$

och $dX(t)$ kallas för en stokastisk differential. Mer precist kallas $dX(t)$ för en stokastisk differential av typen (m,n). Om dessutom $c \in \mathcal{L}^\infty_{loc}[0,T]$ är av typen $1 \times m$ definieras

$$c(t)dX(t) = c(t)a(t)dt + c(t)b(t)dW(t).$$

Vi illustrerar först detta differentialbegrepp genom att diskutera några exempel. I vårt inledande exempel visas att

$$d(W_1(t)W_2(t)) = W_1(t)dW_2(t) + W_2(t)dW_1(t).$$

För att se detta införs den endimensionella normaliserade Wienerprocessen

$$X(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1(t) + W_2(t)),\ 0 \le t \le T.$$

Vi vet att

$$dX^2(t) = 2X(t)dX(t) + dt$$

och därmed följer att

$$\begin{aligned} d(W_1(t)W_2(t)) &= d(X^2(t) - \frac{1}{2}W_1^2(t) - \frac{1}{2}W_2^2(t)) \\ &= 2X(t)dX(t) - W_1(t)dW_1(t) - W_2(t)dW_2(t) \\ &= W_1(t)dW_2(t) + W_2(t)dW_1(t). \end{aligned}$$

Vi skall nu visa en allmän produktregel för stokastisk differentiering. Antag därför

$$dX_i(t) = a_i(t)dt + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t)dW_k(t), \;\; i = 1, 2.$$

där $a_i \in \mathcal{L}^1_{loc}[0,T]$ och $b_{ik} \in \mathcal{L}^2_{loc}[0,T]$, $i = 1, 2$, $k = 1, ..., n$, alla är skalärvärda. Vi påstår att

$$d(X_1(t)X_2(t)) = X_1(t)dX_2(t) + X_2(t)dX_1(t) + \sum_{k=1}^{n} b_{1k}(t)b_{2k}(t)dt.$$

Innebörden här är att det för fixa $0 \le t_1 \le t_2 \le T$ gäller att

$$\begin{aligned} &X_1(t_2)X_2(t_2) - X_1(t_1)X_2(t_1) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} X_1(u)a_2(u)du + \sum_{k=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2} X_1(u)b_{2k}(u)dW_2(u) \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} X_2(u)a_1(u)du + \sum_{k=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2} X_2(u)b_{1k}(u)dW_1(u) + \sum_{k=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2} b_{1k}(u)b_{2k}(u)du. \end{aligned}$$

Om a_i, b_{ik}, $i = 1, 2$, $k = 1, ..., n$, är konstanta i intervallet $[t_1, t_2]$ (dvs $\mathcal{F}_{t_1}$-mätbara) följer denna formel av en direkt kalkyl. Det allmäna fallet följer nu genom approximation med trapprocesser.

Vi definierar nu

$$dX_1(t)dX_2(t) = \sum_{k=1}^{n} b_{1k}(t)b_{2k}(t)dt.$$

Speciellt följer att

$$(dt)^2 = 0$$

$$dtdW_k(t) = dW_k(t)dt = 0$$
$$dW_j(t)dW_k(t) = 0 \text{ om } j \neq k$$

och

$$dW_k(t)dW_k(t) = dt.$$

Produktregeln ovan kan därmed skrivas

$$d(X_1(t)X_2(t)) = X_1(t)dX_2(t) + X_2(t)dX_1(t) + dX_1(t) \cdot dX_2(t).$$

Om $dX(t)$ är en stokastisk differential av typen $(1, n)$ och k är ett heltal ≥ 2 så följer lätt med hjälp av induktion att

$$dX^k(t) = kX^{k-1}(t)dX(t) + \frac{k(k-1)}{2}X^{k-2}(t)(dX(t))^2.$$

Rätt tolkad gäller formeln även för $k = 0, 1$.

Antag nu att $dX_1(t)$, $dX_2(t), ..., dX_m(t)$ är stokastiska differentialer av typen $(1, n)$. Vi sätter

$$X(t) = (X_1(t), X_2(t), ..., X_m(t))$$

och

$$dX(t) = (dX_1(t), dX_2(t), ..., dX_m(t)).$$

Om funktionen $u(x_1, ..., x_m)$ är reellvärd och två gånger kontinuerligt deriverbar påstår vi att

$$du(X(t)) = \nabla u(X(t))^* dX(t) + \frac{1}{2} dX(t)^* H_u(X(t))dX(t)$$

där

$$\nabla u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} \end{bmatrix}$$

är gradienten av u och

$$H_u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i,j \leq m}$$

är Hessianen av u. Specialfallet $u(x_1, ..., x_m) = x_i^k$ där k är ett naturligt tal och $i \in \{1, ..., m\}$ är redan utrett ovan. Man visar lätt att om formeln är sann för två funktioner $u_1(x_1, ..., x_m)$ och $u_2(x_1, ..., x_m)$ så är formeln också sann för deras produkt $u_1(x_1, ..., x_m)\ u_2(x_1, ..., x_m)$. Formeln gäller alltså för polynom i $x_1, ..., x_m \in \mathbf{R}$.

Om funktionen $u(t, x_1, ..., x_m)$ är en gång kontinuerligt deriverbar i $t \in [0, T]$ och två gånger kontinuerligt deriverbar i $x_1, ..., x_m \in \mathbf{R}$ så gäller att

$$du(t, X(t))$$

$$= u_t'(t, X(t))dt + \nabla_x u(X(t))^* dX(t) + \frac{1}{2} dX(t)^* H_{u,x}(X(t)) dX(t)$$

där

$$\nabla_x u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} \end{bmatrix}$$

och

$$H_{u,x} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i,j \leq m}$$

ty genom att uttnyttja vad vi vet i det tidsoberoende fallet följer först att formeln är sann om $u(t, x_1, ..., x_m) = \varphi(t) q(x_1, ..., x_m)$ där φ är kontinuerligt deriverbar och $q(x_1, ..., x_m)$ är ett polynom i $x_1, ..., x_m \in \mathbf{R}$. Formeln följer sedan för alla polynom $u(t, x_1, ..., x_m)$ i variablerna $t, x_1, ..., x_m$ och genom approximation följer till sist formeln för funktioner $u(t, x_1, ..., x_m)$ som är en gång kontinuerligt deriverbara i $t \in [0, T]$ och två gånger kontinuerligt deriverbara i $x_1, ..., x_m \in \mathbf{R}$.

Sats 1. **(Itôs lemma för vektorvärd Wienerprocess)** *Antag att funktionen $u(t, x_1, ..., x_m)$ är en gång kontinuerligt deriverbar i $t \in [0, T]$ och två gånger kontinuerligt deriverbar i $x_1, ..., x_m \in \mathbf{R}$. Antag också att*

$$dX(t) = a(t)dt + b(t)dW(t)$$

där $a = (a_1, ..., a_m) \in \mathcal{L}^1_{loc}[0, T]$ och $b = (b_{ik})_{1 \leq i \leq m,\, 1 \leq k \leq n} \in \mathcal{L}^2_{loc}[0, T]$ är matriser av reellvärda funktioner. Då gäller att

$$du(t, X(t))$$

$$= u_t'(t, X(t))dt + \nabla_x u(X(t))^* dX(t) + \frac{1}{2} dX(t)^* H_{u,x}(X(t)) dX(t)$$

dvs

$$
\begin{aligned}
& du(t, X(t)) \\
&= \frac{\partial u}{\partial t}(t, X(t))dt + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, X(t))dX_i(t) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t, X(t))dX_i(t)dX_j(t).
\end{aligned}
$$

Exempel 1. Om funktionen $u(t, x) = u(t, x_1, ..., x_n)$ är tillräckligt reguljär så gäller

$$
\begin{aligned}
du(t, W(t)) &= \frac{\partial u}{\partial t}(t, W(t))dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, W(t))dW_i(t) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t, W(t))dW_i(t)dW_j(t) \\
&= (\frac{\partial u}{\partial t}(t, W(t)) + \Delta u(t, W(t))dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, W(t))dW_i(t).
\end{aligned}
$$

Råkar funktionen $u(t, x)$ lösa värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta u = 0$$

så följer att

$$du(t, W(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, W(t))dW_i(t).$$

[]

Exempel 2. Låt n aktiers vektorpris

$$(S(t))_{t \geq 0} = ((S_1(t), .., S_n(t)))_{t \geq 0}$$

beskriva en geometrisk Brownsk rörelse med exponentiell drift. Volatilitetsmatrisen betecknas med

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \ldots\ldots \sigma_{1n} \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \sigma_{n1} \ldots\ldots \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

och log-vektorprisets driftsvektor betecknas med $(\alpha_{1,\ldots,}\alpha_n) \in \mathbf{R}^n$. Det finns alltså en normaliserad Wienerprocess i $W(t) = (W_1(t), ..., W_n(t))$, $t \geq 0$, i $\mathbf{R}^n$ så att

$$S_i(t) = e^{\alpha_i t + \sigma_i W(t)},\ i = 1, ..., n.$$

Om vi definierar

$$\mu_i = \alpha_i + \frac{\mid \sigma_i \mid^2}{2},\ i = 1, ..., n$$

så följer dels från den endimensionella teorin dels från sats 1 att

$$dS_i(t) = S_i(t)(\mu_i dt + \sigma_i dW(t)),\ i = 1, ..., n.$$

[]

Exempel 3. Antag $x = (x_1, ..., x_n)$. Låt $\sigma(t, x)$ vara en $n \times n$-matris och $a(t, x) = (\ a_1(t, x), ..., a_n(t, x))$ en $(1 \times n)$-matris för alla $(t, x) \in [0, T[\ \times \mathbf{R}^n$. Sätt

$$\epsilon(t, x) = \sigma(t, x)\sigma(t, x)^*.$$

Låt till sist funktionen $u(t, x) = u(t, x_1, ..., x_n)$ vara en lösning till den paraboliska differentialekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \epsilon_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + b(t, x)u(t, x) = 0$$

och antag X är en lösning till den stokastiska differentialekvationen

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t).$$

Om

$$(\sigma(t, x)\nabla u(t, X(t)))^* e^{\int_t^T b(s, X(s))ds} \in \mathcal{L}^2\,[0, T]$$

så ger en formell kalkyl, som i fallet $n = 1$, att

$$u(t, x) = E\left[u(T, X(T))e^{\int_t^T b(s, X(s))ds} \mid X(t) = x\right].$$

Om vi skriver

$$u_{|t=T} = f$$

så följer alltså att

$$u(t, x) = E\left[f(X(T))e^{\int_t^T b(s, X(s))ds} \mid X(t) = x\right].$$

Denna funktion kallas Feynman-Kac-lösningen till differentiakekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\epsilon_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}a_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+b(t,x)u(t,x)=0,\ t<T,\ x\in\mathbf{R}^n$$

med slutvärdet

$$u_{|t=T}=f.$$

Ett stringent bevis, med angivande av lämpliga villkor på differentialekvationernas koefficienter för att Feynman-Kac-lösningen skall vara en lösning i klassisk mening, ligger långt utanför denna kurs. []

Föregående exempel visar att vi kan lösa viktiga paraboliska slutvärdesproblem genom simulering av lösningar till lämpliga stokastiska differentialekvationer och sedan utnyttja Monte Carlo-metoder. Det kan därför vara på sin plats att påpeka att existens-entydighetssatsen för stokastiska differentialekvationer i det skalärvärda fallet lätt generaliseras till det vektorvärda fallet.

Black-Scholes modell för n aktier och en obligation kan beskrivas på följande sätt. Aktiernas vektorprisprocess

$$(S(t))_{0\leq t\leq T}=(S_1(t),..,S_n(t))_{0\leq t\leq T}$$

antags beskriva en geometrisk Brownsk rörelse med exponentiell drift i tidsintervallet $[0,T]$. Volatilitetsmatrisen brukar betecknas med

$$\sigma=\left[\begin{array}{c}\sigma_{11}.....\sigma_{1n}\\ .....\\ .....\\ \sigma_{n1}.....\sigma_{nn}\end{array}\right]$$

och log-prisets driftsvektor med $(\alpha_{1,...,}\alpha_n)\in\mathbf{R}^n$. Dessutom innehåller modellen en obligation med prisprocessen

$$B(t)=B(0)e^{rt},\ 0\leq t\leq T$$

där $B(0)$ och r är positiva konstanter. Vi skall nu härleda Black-Scholes differentialekvation i samband med Black-Scholes modell för flera aktier.

Betrakta en europeisk option med slutdagen T . Utbetalningsfunktionen $g(s) = g(s_1, ..., s_n)$, $s_1, ..., s_n > 0$, antags vara en mätbar funktion sådan att

$$| \, g(e^{x_1}, ..., e^{x_n}) \, | \leq Be^{C|x|}, \;\; x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$$

för ett lämpliga positiva tal B och C. Vi skall härleda ett teoretiskt pris för optionens värde $v(t)$ vid tiden $t \leq T$ och ansätter

$$v(t) = v(t, S(t)) = v(t, S_1(t), ..., S_n(t)).$$

Bilda därför vid tiden t en portfölj bestående av ett derivat och $-\Delta_i$ aktier av det $i : te$ slaget för $i = 1, ..., n$. Dess värde är lika med

$$\Pi(t) = v(t, S(t)) - \sum_{i=1}^{n} \Delta_i S_i(t).$$

Vi försöker nu välja $\Delta_1, ..., \Delta_n$ så att portföljen lokalt avkastar lika mycket som ett annat värsdepapper i portföljen, nämligen obligationen dvs

$$d\Pi(t) = r\Pi(t)dt.$$

Om funktionen $v(t, s)$ är tillräckligt reguljär ger Itôs lemma

$$dv(t, S(t))$$

$$= \frac{\partial v}{\partial t}(t, S(t))dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial s_i}(t, S(t))dS_i(t)$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial s_i \partial s_j}(t, S(t)))dS_i(t)dS_j(t)$$

$$= (\frac{\partial v}{\partial t}(t, S(t)) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} (\sigma_i \cdot \sigma_j) S_i(t) S_j(t) \frac{\partial^2 v}{\partial s_i \partial s_j}(t, S(t)))dt$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial s_i}(t, S(t))dS_i(t)$$

där

$$\sigma_i \cdot \sigma_j = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik} \sigma_{jk} = (\sigma\sigma^*)_{ij}, \;\; i, j = 1, ..., n.$$

Det följer alltså att

$$(\frac{\partial v}{\partial t}(t,S(t))+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}(\sigma_i\cdot\sigma_j)S_i(t)S_j(t)\frac{\partial^2 v}{\partial s_i\partial s_j}(t,S(t)))dt$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial v}{\partial s_i}(t,S(t))-\Delta_i)dS_i(t)=r(v(t,S(t))-\sum_{i=1}^{n}\Delta_i S_i(t))dt.$$

Härav dras slutsatsen att

$$\Delta_i=\frac{\partial v}{\partial s_i}(t,S(t)),\ i=1,...,n$$

och

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,S(t))+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}(\sigma_i\cdot\sigma_j)S_i(t)S_j(t)\frac{\partial^2 v}{\partial s_i\partial s_j}(t,S(t))$$

$$=r(v(t,S(t))-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial s_i}(t,S(t))S_i(t)).$$

Vi leds alltså till Black-Scholes differentialekvation i flera variabler

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,s)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}(\sigma_i\cdot\sigma_j)s_is_j\frac{\partial^2 v}{\partial s_i\partial s_j}(t,s)+r\sum_{i=1}^{n}s_i\frac{\partial v}{\partial s_i}(t,s)-rv(t,s)=0$$

i området $s_1>0,...,s_n>0,\ t<T$. Dessutom gäller slutvillkoret

$$v(T,s)=g(s,T).$$

Vi definierar nu $v(t,s)$ som Feynman-Kac-lösningen till detta paraboliska problem och derivatets värde vid tiden t definieras lika med $v(t,S(t))$.

Feynman-Kac-lösningen $v(t,s)$ till slutvärdesproblemet ovan kan beskrivas på följande sätt. Antag

$$dS_i(t)=S_i(t)(\mu_i dt+\sigma_i dW(t)),\ i=1,...,n$$

och inför det så kallade marknadspriset för risk

$$\lambda=\sigma^{-1}\begin{bmatrix}\mu_1-r\\ .\\ .\\ .\\ \mu_n-r\end{bmatrix}$$

och
$$W^\lambda(t) = W(t) + \lambda t,\ 0 \le t \le T$$
så att
$$dS_i(t) = S_i(t)(rdt + \sigma_i dW^\lambda(t)),\ i = 1, ..., n.$$
Cameron-Martins sats utvidgas lätt till flera dimensioner och det följer att processen $(W^\lambda(t))_{0\le t\le T}$ är en normaliserad Wienerprocess i n dimensioner relativt måttet
$$dQ = e^{-\lambda^* W(T) - \frac{|\lambda|^2}{2}T} dP.$$
Feynman-Kac formel ger nu att
$$v(t,s) = e^{-r\tau} E^Q \left[g(S(T)) \mid S(t) = s \right]$$
där $\tau = T - t$. För fixt $i \in \{1, ..., n\}$ ger ekvationen
$$S_i(u) = S_i(0) e^{(r - \frac{|\sigma_i|^2}{2})u + \sigma_i W^\lambda(u)}$$
att
$$S_i(T) = S_i(t) e^{(r - \frac{|\sigma_i|^2}{2})(T-t) + \sigma_i (W^\lambda(T) - W^\lambda(t))}$$
och det följer att
$$v(t,s) = e^{-r\tau} E^Q \left[g(S(T)) \mid S(t) = s \right]$$
$$= e^{-r\tau} E^Q \left[g(s_1 e^{(r - \frac{|\sigma_1|^2}{2})(T-t) + \sigma_1 (W^\lambda(T) - W^\lambda(t))}, ..., s_n e^{(r - \frac{|\sigma_n|^2}{2})(T-t) + \sigma_n (W^\lambda(T) - W^\lambda(t))}) \right]$$
$$= e^{-r\tau} E^Q \left[g(s_1 e^{(r - \frac{|\sigma_1|^2}{2})\tau + \sigma_1 W^\lambda(\tau)}, ..., s_n e^{(r - \frac{|\sigma_n|^2}{2})\tau + \sigma_n W^\lambda(\tau)}) \right]$$
$$= e^{-r\tau} E \left[g(s_1 e^{(r - \frac{|\sigma_1|^2}{2})\tau + \sigma_1 W(\tau)}, ..., s_n e^{(r - \frac{|\sigma_n|^2}{2})\tau + \sigma_n W(\tau)}) \right].$$

Om funktionen g är positivt homogen av graden 1 dvs
$$g(as) = ag(s),\ a > 0$$
så följer att optionens värde är (explicit) ränteoberoende. Mer precist gäller att
$$v(t,s) = E \left[g(s_1 e^{-\frac{|\sigma_1|^2}{2}\tau + \sigma_1 W(\tau)}, ..., s_n e^{-\frac{|\sigma_n|^2}{2}\tau + \sigma_n W(\tau)}) \right].$$

Typiska exempel fås genom välja

$$g(s_1, ..., s_n) = \max(0, s_i - s_j),\ i \neq j \text{ (bytesoption)}$$

$$g(s_1, ..., s_n) = \max(0, \max_{1 \le i \le n} s_i - K) \text{ (option på maximum)}$$

och

$$g(s_1, ..., s_n) = \max(0, \min_{1 \le i \le n} s_i - K) \text{ (option på minimum)}.$$

Bytesoptionen klarade vi redan av i kursen Optioner och matematik. Att beräkna priset för optionen på maximum eller minimum av n aktiepriser är synnerligen besvärligt för stora n. Monte Carlo-metoder torde i dessa fall ha störst potential. I vissa fall kan en spektralrepresentation av vektorlog-priset ge snabba beräkningar. Sätt

$$S_i(t) = e^{(\mu_i - \frac{|\sigma_i|^2}{2})t + \sigma_i W(t)},\ i = 1, ...n$$

som ovan och låt

$$X(t) = \sigma W(t).$$

Processen $(X(t))_{t \ge 0}$ är centrerad Gaussisk och

$$E\left[X_i(s)X_j(t)\right] = E\left[\sigma_i W(s) \sigma_j W(t)\right]$$

$$= E\left[\sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik} W_k(s) \sum_{k=1}^{n} \sigma_{jk} W_k(t)\right]$$

$$= (\sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}\sigma_{jk}) \min(s,t) = c_{ij} \min(s,t)$$

där

$$c_{ij} = \sigma_i \cdot \sigma_j,\ i, j = 1, ..., n.$$

Sätt

$$C = (c_{ij})_{1 \le i,j \le n}.$$

Matrisen C symmetrisk. Den är också positivt semi-definit ty om $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbf{R}^n$ gäller att

$$a^* C a = \sum_{i,j=1}^{n} a_i c_{ij} a_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j E\left[X_i(1)X_j(1)\right]$$

$$= E\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j X_i(1) X_j(1)\right] = E\left[(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i(1))^2\right] \geq 0.$$

Genom att använda spektralsatsen för symmetriska matriser erhålls en ON-bas

$$e_1 = (e_{11}, ..., e_{n1}), ..., e_n = (e_{1n}, ..., e_{nn})$$

i $\mathbf{R}^n$ bestående av egenvektorer för C. Låt $\nu_1, ..., \nu_n$ vara motsvarande egenvärden. Eftersom

$$e_i^* C e_i = \nu_i, \;\; i = 1, ..., n$$

så är $\nu_1, ..., \nu_n \geq 0$. Relationen $Ce_k = \nu_k e_k$ kan skrivas

$$\sum_{l=1}^{n} c_{il} e_{lk} = \nu_k e_{ik}$$

och vi får

$$\sum_{l=1}^{n} c_{il} e_{lk} e_{jk} = \nu_k e_{ik} e_{jk}.$$

Eftersom den matris som bildas av egenvektorerna som kolonner är en ortogonalmatris så måste samma matris också ha ortogonala rader dvs

$$\sum_{k=1}^{n} e_{lk} e_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{om } l \neq j \\ 1, & \text{om } l = j \end{cases} .$$

Alltså är

$$\sum_{k=1}^{n} \nu_k e_{ik} e_{jk} = \sum_{l=1}^{n} c_{il} \left(\sum_{k=1}^{n} e_{lk} e_{jk} \right) = c_{ij}.$$

Definiera nu

$$Y_i(t) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\nu_k} e_{ik} W_k(t), \;\; i = 1, ..., n.$$

Processen $(Y(t))_{t\geq 0} = (Y_1(t), ..., Y_n(t))_{t \geq 0}$ är en $\mathbf{R}^n$-värd centrerad Gaussisk process och

$$E^Q\left[Y_i(s) Y_j(t)\right] = (\sum_{k=1}^{n} \nu_k e_{ik} e_{jk}) \min(s,t) = c_{ij} \min(s,t).$$

Processerna $(X(t))_{t\geq 0}$ och $(Y(t))_{t\geq 0}$ är alltså ekvivalenta i fördelning. Notera att

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\nu_k} e_k W_k(t).$$

Antag utbetalningsfunktionen g är som ovan. Priset vid tiden t för ett enkelt derivat av europeisk typ som slutdagen T ger innehavaren beloppet $g(S(T))$ är lika med

$$e^{-r\tau} E\left[g\left(s_1 e^{(r-\frac{|\sigma_1|^2}{2})\tau+\sigma_1 W(\tau)}, ..., s_n e^{(r-\frac{|\sigma_n|^2}{2})\tau+\sigma_n W(\tau)}\right)\right]$$

$$= e^{-r\tau} E\left[g\left(s_1 e^{(r-\frac{|\sigma_1|^2}{2})\tau+Y_1(\tau)}, ..., s_n e^{(r-\frac{|\sigma_n|^2}{2})\tau+Y_n(\tau)}\right)\right].$$

Om alla utom m st egenvärden är noll blir denna förväntan en m-dimensionell integral. Om $n-m$ st egenvärden är små kan de i en approximation sättas lika med noll. På detta sätt kan vi i vissa fall få snabba beräkningar om m är litet.

Vi antar fr o m nu att $\mathcal{F}_t = \sigma(S(u);\ u \leq t)$. Observera att $\sigma(S(u);\ u \leq t) = \sigma(W(u);\ u \leq t)$. Om ett så kallat betingat kontrakt utbetalar beloppet $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$ slutdagen T, där Q är martingalmåttet så definieras optionens värde vid tiden t lika med $e^{-r\tau} E^Q[Y \mid \mathcal{F}_t]$. Motiveringen är helt analog med fallet $n = 1$. Låt oss studera ett specialfall av formen

$$Y = f(S(T), \int_0^T g(t, S(t))dt)$$

då $n = 1$ och f och g är deterministiska funktioner. För att värdera detta kontrakt ansätts att derivatets värde vid tiden t är av formen

$$v(t) = v(t, S(t), Z(t))$$

där

$$Z(t) = \int_0^t g(u, S(u))du.$$

Notera att

$$dZ(t) = g(t, S(t))dt.$$

Som vanligt utnyttjar vi oss av Δ-hedging för att bestämma optionens värde. Bilda därför vid tiden t en portfölj bestående av ett derivat och $-\Delta$ aktier. Dess värde är lika med

$$\Pi(t) = v(t) - \Delta S(t)$$

och vi ansätter att

$$d\Pi(t) = r\Pi(t)dt$$

dvs i kompakt form

$$\frac{\partial v}{\partial t}dt + \frac{\partial v}{\partial s}dS + \frac{\partial v}{\partial z}dZ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(dS)^2 - \Delta dS = r(v - \Delta S)dt.$$

Härav erhålls

$$\Delta = \frac{\partial v}{\partial s}(t, S(t), Z(t))$$

och vi leds till (den degenererade paraboliska) differentialekvationen

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + rs\frac{\partial v}{\partial s} + g(t,s)\frac{\partial v}{\partial z} - rv = 0$$

med slutvillkoret

$$v(T, s, z) = f(s, z).$$

Här kan fallet

$$\begin{cases} f(s,z) = \max(0, e^{z/T} - K) \\ g(t,s) = \ln s \end{cases}$$

behandlas analytiskt (geometrisk medelvärdesoption). I specialfallet

$$\begin{cases} f(s,z) = \max(0, \frac{z}{T} - s) \\ g(t,s) = s \end{cases}$$

("average strike put") leder en lämplig ansats till en förenklad differentialekvation i lägre dimension (se övning 1). Fallet

$$\begin{cases} f(s,z) = \max(0, \frac{z}{T} - K) \\ g(t,s) = s \end{cases}$$

("fixed strike Asian call") kan också förenklas på liknande sätt [RS].

I nästa kapitel ges ytterligare tillämpningar av stokastisk analys i flera variabler.

Övningar

1. Antag $f(s,z) = \max(s - \frac{z}{T})$ och $g(t,s) = s$ ("average strike call"). Ansätt

$$v(t,s,z) = su(t,y),\ y = \frac{z}{s}.$$

Visa att

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,y) + \frac{1}{2}\sigma^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,y) + (1-ry)\frac{\partial u}{\partial y}(t,y) = 0$$

och

$$u(T,y) = \max(0, 1 - \frac{y}{T}).$$

2. Antag $0 < a < T$ och

$$Y = \max(0, \frac{1}{a}\int_{T-a}^{T} S(t)dt - K)$$

(jämför flera warranter på marknaden). Bestäm funktioner f och g så att

$$Y = f(S(T), \int_0^T g(t, S(t))dt).$$

3. Antag

$$Y = \max(0, \frac{1}{T}\int_0^T S(t)dt - K).$$

Sätt

$$Z(t) = \frac{1}{t}\int_0^t S(u)du.$$

Ansätt att derivatets pris vid tiden t är av form $v(t, S(t)), Z(t))$ och härled en parabolisk differentialekvation för $v(t,s,z)$.