11. HJM-metodik för räntemodeller

Vi har tidigare i denna framställning behandlat Vasičeks och Hull-Whites modeller där T-obligationens pris vid tiden t är en deterministisk funktion av den korta räntan $r(t)$. Det är också naturligt att studera räntemodeller som beror på fler faktorer. I detta kapitel berör vi ett sätt att beskriva en arbitragefri modell för obligationer som brukar kallas HJM-metodiken efter Heath, Jarrow och Morton $[HJM]$. Här spelar forwardräntorna en nyckelroll. För mer fullständiga framställningar hänvisas till Bingham och Kiesel $[BK]$, Björk $[BTS]$, $[BTO]$, Brigo och Mercurio $[BM]$, Hull $[H]$, Jarrow $[J1]$ och Musiela och Rutkowski $[MR]$.

Vi börjar med att repetera en del beteckningar och begrepp, som vi redan varit inne på. En T-obligation är en nollkupongsobligation med lösendag T och nominellt värde 1. Obligationspriset vid tiden t betecknas med $p(t,T)$ och skrivs

$$p(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)}$$

där storheten $R(t,T)$ kallas för $(T-t)$-räntan vid tiden t. Kurvan

$$y = R(t,T),\ T \geq t$$

kallas för avkastningskurvan vid tiden t.

Antag $t \leq T < U$ och låt $R(t,T,U)$ beteckna forwardräntan för perioden $[T,U]$ kontrakterad vid tiden t. Kravet på arbitagefrihet medför som vi redan vet att

$$p(t,U) = p(t,T)e^{-R(t,T,U)(U-T)}$$

Notera att

$$R(t,T) = R(t,t,T).$$

Den momentana forwardräntan $f(t,T)$ vid tiden T, sedd från tidpunkten t, definieras av gränsvärdet

$$f(t,T) = \lim_{U\to T} R(t,T,U)$$

dvs

$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln p(t,T)}{\partial T}$$

och det följer att

$$p(t,U) = p(t,T)e^{-\int_T^U f(t,u)du},\ t \le T \le U$$

under lämpliga regularitetsförutsättningar.

Den korta räntan $r(t)$ vid tiden t definieras av ekvationen

$$r(t) = f(t,t).$$

Sätt

$$B(t) = B(0)e^{\int_0^t r(u)du},\ 0 \le t \le T.$$

Antag beloppet $B(0)$ placeras i en obligation med närmast omedelbar inlösen och att det vid lösen utbetalade beloppet omedelbart placeras i en obligation med närmast omedelbar inlösen osv. Kapitalet vid tiden t blir då lika med $B(t)$. Observera att

$$dB(t) = r(t)B(t)dt.$$

Vi kan alternativt tänka oss att $B(t)$ representerar banksaldot vid tiden t om beloppet $B(0)$ satts in i banken vid tiden 0.

Utgångspunkten för HJM-metodiken är att de momentana forwardräntorna uppfyller ekvationer av typen

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t),\ 0 \le t \le T$$

för lämpliga progressivt mätbara processer $\alpha^T = (\alpha(t,T))_{0\le t\le T}$ och $\sigma^T = (\sigma(t,T))_{0\le t\le T}$, där $0 \le T \le T_{fin}$. Här är $\sigma(t,T)$ en $1 \times n$ matris för varje t och $(W(t))_{0\le t\le T}$ en $\mathbf{R}^n$-värd normaliserad Wienerprocess i tidsintervallet $[0,T]$. Vi antar T_{fin} en fix framtida tidpunkt. Som begynnelsevärde för differentialekvationen väljes

$$f(0,T) = f^*(0,T)$$

där

$$p^*(0,T) = e^{-\int_0^T f^*(0,u)du}$$

och där som vanligt märkta variabler syftar på marknadsvärden (eventuellt skattade sådana). Eftersom

$$p(0,T) = e^{-\int_0^T f(0,u)du}$$

följer att ekvationen

$$p(0,T) = p^*(0,T)$$

är uppfylld. Måttet P kallas det fysikaliska måttet och processerna σ^T, $0 \leq T \leq T_{fin}$, kallas för modellens volatilitetsstruktur. Nedan betecknar $\mathcal{F}_t = \sigma(W(s);\ s \leq t), 0 \leq t \leq T_{fin}$.

Nedan genomförs diverse kalkyler som kräver olika matematiska villkor för att vara sanna. Dessa villkor utelämnas ofta och syftet här är främst illustrera metoden HJM. Vi startar med den grundläggande ekvationen

$$p(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,u)du},\ 0 \leq t \leq T.$$

Genom att tillämpa Itôs lemma och räkna formellt följer för fixt T att

$$dp(t,T) = p(t,T)d(-\int_t^T f(t,u)du) + \frac{1}{2}p(t,T)(d(-\int_t^T f(t,u)du))^2$$

och

$$d\int_t^T f(t,u)du = -f(t,t)dt + \int_t^T df(t,u)du$$

$$= -f(t,t)dt + \int_t^T (\alpha(t,u)dt + \sigma(t,u)dW(t))du$$

$$= (-f(t,t) + \int_t^T \alpha(t,u)du)dt + (\int_t^T \sigma(t,u))du)dW(t).$$

Vi definierar nu

$$\hat{\alpha}(t,T) = -\int_t^T \alpha(t,u)du$$

och

$$\hat{\sigma}(t,T) = -\int_t^T \sigma(t,u)du$$

och får

$$-d\int_t^T f(t,u)du = (r(t) + \hat{\alpha}(t,T))dt + \hat{\sigma}(t,T)dW(t).$$

Det följer alltså att

$$dp(t,T) = p(t,T)((r(t) + \hat{\alpha}(t,T) + \frac{1}{2} \mid \hat{\sigma}(t,T) \mid^2)dt + \hat{\sigma}(t,T)dW(t))$$

och därmed

$$p(t,T) = p(0,T)e^{\int_0^t (r(s)+\hat{\alpha}(s,T))ds + \int_0^t \hat{\sigma}(s,T)dW(s)}.$$

Alltså är

$$\frac{p(t,T)}{B(t)} = \frac{p(0,T)}{B(0)} e^{\int_0^t \hat{\alpha}(s,T)ds + \int_0^t \hat{\sigma}(s,T)dW(s)}$$

Sätt nu

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds, \ 0 \leq T \leq T_{fin}$$

och

$$W^\lambda(t) = W(t) + \Lambda(t), \ 0 \leq t \leq T_{fin}$$

där $\lambda(t)$, $0 \leq t \leq T_{fin}$, är en tills vidare okänt vektorvärd funktion. Det följer att

$$\frac{p(t,T)}{B(t)} = \frac{p(0,T)}{B(0)} e^{\int_0^t (\hat{\alpha}(s,T)) - \hat{\sigma}(s,T)\lambda(s))ds + \int_0^t \hat{\sigma}(s,T)dW^\lambda(s)}.$$

Vi skall i nästa steg ställa villkor på λ så att modellen blit arbitragefri. I det följande förutsättes därför att funktionen λ kan väljas så att

$$\hat{\alpha}(t,T)) - \hat{\sigma}(t,T)\lambda(t) = -\frac{1}{2} \mid \hat{\sigma}(t,T) \mid^2, \ 0 \leq t \leq T \leq T_{fin}$$

och att det finns ett sannolikhetsmått Q ekvivalent med P så att processen $(W^\lambda(t))_{0 \leq t \leq T_{fin}}$ är en normaliserad Wienerprocess relativt Q. Observera att

$$\frac{p(t,T)}{B(t)} = \frac{p(0,T)}{B(0)} e^{-\int_0^t \frac{1}{2} |\hat{\sigma}(s,T)|^2 ds + \int_0^t \hat{\sigma}(s,T)dW^\lambda(s)}$$

och

$$d\frac{p(t,T)}{B(t)} = \frac{p(t,T)}{B(t)} \hat{\sigma}(t,T)dW^\lambda(t).$$

Under lämliga integrabilitetsvillkor är därför processen $(\frac{p(t,T)}{B(t)}, \mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ en Q-martingal för alla $T \leq T_{fin}$. Måttet Q kallas martingalmått.

Genom att derivera relationen

$$\hat{\alpha}(t,T)) - \hat{\sigma}(t,T)\lambda(t) = -\frac{1}{2} \mid \hat{\sigma}(t,T) \mid^2$$

med avseende på T erhålls ekvationen

$$\alpha(t,T) - \sigma(t,T)\lambda(t) = \sigma(t,T) \int_0^T \sigma(t,u)^* du.$$

Sätts

$$\alpha^\lambda(t,T) = \sigma(t,T) \int_t^T \sigma(t,u)^* du.$$

följer att

$$df(t,T) = \alpha^\lambda(t,T)dt + \sigma(t,T)dW^\lambda(t),\ \ 0 \leq t \leq T.$$

Den momentana forwardräntan $f(t,T)$ har alltså driften $\alpha^\lambda(t,T)$ relativt martingalmåttet Q.

Exempel 1 (Modell av Ho-Lee). Antag $n = 1$ och $\sigma(t,T) = \sigma$, där $\sigma > 0$ är en konstant. Det följer att

$$\alpha^\lambda(t,T) = \sigma \int_t^T \sigma ds = \sigma^2(T-t)$$

och

$$df(t,T) = \sigma^2(T-t) + \sigma dW^\lambda(t).$$

Integration ger

$$f(t,T) = f(0,T) + \sigma^2 t(T - \frac{t}{2}) + \sigma W^\lambda(t)$$

och därmed är

$$r(t) = f(0,t) + \sigma^2 \frac{t^2}{2} + \sigma W^\lambda(t).$$

[]

Sats 1. *Antag $\sigma(t,T)$, $t \leq T \leq T_{fin}$ är en deterministisk funktion och låt $T < U$ vara fixa. En europeisk köpoption på U-obligationen med slutdagen T och lösenpriset K har priset*

$$\mathrm{call}(t,K,T,U) = p(t,U)\Phi(d_1) - Kp(t,T)\Phi(d_2)$$

vid tiden $t < T$, där

$$d_1 = \frac{\ln \frac{p(t,U)}{Kp(t,T)} + \frac{1}{2}\Sigma^2(t)}{\Sigma(t)},$$

$$d_2 = \frac{\ln \frac{p(t,U)}{Kp(t,T)} - \frac{1}{2}\Sigma^2(t)}{\Sigma(t)}$$

och

$$\Sigma(t) = \sqrt{\int_t^T \mid \hat{\sigma}(u,U) - \hat{\sigma}(u,T) \mid^2 du}.$$

Om en europeisk säljoption på U-obligationen med slutdagen T och lösenpriset K har priset $\mathrm{put}(t,K,T,U)$ *vid tiden t så gäller att*

$$p(t,U)-\mathrm{call}(t,K,T,U)=Kp(t,T)-\mathrm{put}(t,K,T,U).$$

Bevis. Vi inför T-obligationen som numerär och får

$$\max(0,p(T,U)-K)=p(T,T)\max(0,\frac{p(T,U)}{p(T,T)}-K).$$

Sätt

$$S(t)=\frac{p(t,U)}{p(t,T)},\ 0\le t\le T$$

och

$$B(t)=1,\ 0\le t\le T\ .$$

Notera att

$$S(t)=S(0)e^{\int_0^t(\hat{\alpha}(u,U)-\hat{\alpha}(u,T))du+\int_0^t(\hat{\sigma}(u,U)-\hat{\sigma}(u,T))dW(u)}$$

och

$$dS(t)=S(t)(\gamma(t)dt+(\hat{\sigma}(t,U)-\hat{\sigma}(t,T))dW(t))$$

för en lämplig progressivt mätbar stokastisk process $\gamma(t)$, $0\le t\le T$. Vi ansätter att optionen har värdet $v(t,p(t,U),p(t,T))$ kr vid tiden $t\in[0,T]$ där

$$v(t,ap(t,U),ap(t,T))=av(t,p(t,U),p(t,T)),\ a>0$$

och skriver

$$v(t,p(t,U),p(t,T))=p(t,T)w(t,S(t)).$$

Vid en godtycklig tidpunkt $t\in[0,T]$ bildas en portfölj bestående av en köpoption i U-obligationen och $-\Delta$ U-obligationer. Portföljens värde $\Pi(t)$ i den nya prisenheten vid tiden t är lika med

$$\Pi(t)=w(t,S(t))-\Delta S(t).$$

Antag nu att

$$d\Pi(t)=0\ (=\Pi(t)\frac{dB(t)}{B(t)}).$$

Itôs lemma ger

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,S(t))dt+\frac{\partial w}{\partial s}(t,S(t))dS(t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(t,S(t))(dS(t))^2-\Delta dS(t)=0$$

dvs

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,S(t))dt+\frac{\partial w}{\partial s}(t,S(t))dS(t)+\frac{(\hat{\sigma}(t,U)-\hat{\sigma}(t,T))^2S(t)^2}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(t,S(t))dt$$
$$-\Delta dS(t)=0.$$

Härav följer att

$$\Delta=\frac{\partial w}{\partial s}(t,S(t))$$

och

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,S(t))+\frac{(\hat{\sigma}(t,U)-\hat{\sigma}(t,T))^2S(t)^2}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(t,S(t))=0.$$

Vi leds alltså till ekvationen

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,s)+\frac{(\hat{\sigma}(t,U)-\hat{\sigma}(t,T))^2s^2}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(t,s)=0$$

med slutvillkoret

$$w(t,s)=\max(0,s-K).$$

Nu följer från kapitel 1, exempel 1, att

$$w(t,S(t))=S(t)\Phi(d_1)-K\Phi(d_2).$$

Optionens värde vid tiden t uttryckt i kr blir således

$$v(t,S(T))=p(t,T)w(t,S(T))$$

$$=p(t,U)\Phi(d_1)-p(t,T)K\Phi(d_2).$$

Säljoptionens värde följer genom ett arbitrageargument på samma sätt som för Hull-Whites modell. []

Övningar

1. Antag $\sigma(t,T)=\sigma e^{-a(T-t)}$, där $a,\sigma>0$ är parametrar. Vilken dynamik har processen $(r(t))_{0\leq t\leq T_{fin}}$ relativt Q?

2. Visa att

$$r(t) = f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)ds + \int_0^t \sigma(s,t)dW(s).$$

Visa också att

$$dr(t) = \mu(t)dt + \sigma(t,t)dW(t)$$

där

$$\mu(t) = f'_T(0,t) + \alpha(t,t) + \int_0^t \alpha'_T(s,t)ds + \int_0^t \sigma'_T(s,t)dW(s).$$