2. Måtteori

Måtteori utgör en av matematikens äldsta områden främst beroende på ett uråldrigt intresse för geometriska mått såsom bågländ, area, volym osv. Den mått- och integrationsteori, som har visat sig särskilt användbar inom teorierna för differentialekvationer, Fourieranalys och stokastiska processer, utvecklades dock först i början av 1900-talet, främst genom den franske matematikern Lebesgue. Inom teorin för finansiella derivat uppträder så kallade riskneutrala mått för första gången omkring 1980 och de har sedan dess spelat en mycket central roll för att vidareutveckla teorin.

Vi återger här delar av måtteorin och gör emellanåt vissa sannolikhetsteoretiska exemplifieringar. Bevis går vi sällan in på. Vårt syfte är främst att nöta in en formalism som är mycket användbar bl a inom finansiell matematik.

Vi börjar med en del mängdteoretiska begrepp. Antag R är en abstrakt mängd. Om ett element x tillhör R skrivs detta $x \in R$. Vi skriver $A \subseteq R$ om varje element i A också tillhör R och säger att A är en delmängd av R. Alternativt sägs i detta fall att R omfattar A och detta uttrycks $R \supseteq A$. Om $A, B \subseteq R$ definieras snittet

$$A \cap B = \{x \in R;\, x \in A \text{ och } \ x \in B\}$$

och unionen

$$A \cup B = \{x \in R;\, x \in A \text{ eller } x \in B\}\,.$$

Dessa operationer utvidgas lätt till ett godtyckligt antal mängder. Vidare definieras

$$A \setminus B = \{x \in R;\, x \in A \text{ och } \ x \notin B\}\,.$$

Mängden $R \setminus B$ kallas för komplementet till B relativt grundmängden R. Tomma mängden betecknas med $\emptyset$. Två mängder sägs vara disjunkta om snittet av dem är tomt.

En klass $\mathcal{A}$ av delmängder av R kallas för en σ-algebra av delmängder av R om

(i) $R \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow R \setminus A \in \mathcal{A}$

(iii) $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbf{N} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

I detta fall kallas det ordnade paret $(R, \mathcal{A})$ för ett mätbart rum. Klassen $\{\emptyset, R\}$ är σ-algebra av delmängder av R. Detsamma gäller klassen 2^R bestående av alla delmängder av R. Notera att snittet av σ-algebror av delmängder av R är en ny σ-algebra varför det till varje given klass $\mathcal{C}$ av delmängder av R finns en minsta σ-algebra av delmängder av R (med avseende på mängdinklusion) som omfattar $\mathcal{C}$. Denna σ-algebra sägs genereras av $\mathcal{C}$ och betecknas med $\sigma(\mathcal{C})$. Den σ-algebra som genereras av de öppna delmängderna av $\mathbf{R}^n$ kallas för Borel-σ-algebran i $\mathbf{R}^n$ och betecknas med $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$. Om $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ kallas A en Borelmängd i $\mathbf{R}^n$(efter den franske matematikern Borel, som för övrigt var Lebesgues lärare). Man kan visa att $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ genereras av alla slutna (eller öppna) delintervall av $\mathbf{R}$.

Antag att $(R, \mathcal{A})$ är ett mätbart rum. En funktion μ definierad i hela $\mathcal{A}$ och med värden i intervallet $[0, +\infty]$ kallas ett positivt mått om $\mu(\emptyset) = 0$ och

$$\mu(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$$

för varje sekvens $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbf{N}$, av parvis disjunkta mängder. Den ordnade tripeln $(R, \mathcal{A}, \mu)$ sägs i detta fall vara ett positivt måttrum. Råkar $\mu(R) < +\infty$ kallas μ för ett ändligt positivt mått och om $\mu(R) = 1$ kallas μ för ett sannolikhetsmått. Den ordnade tripeln $(R, \mathcal{A}, \mu)$ kallas för ett ändligt positivt måttrum om μ är ett ändligt positivt mått och ett sannolikhetsrum om μ är ett sannolikhetsmått. Sannolikhetsrum betecknas ofta $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Om $(R, \mathcal{A}, \mu)$ är ett positivt måttrum sägs ibland (något oprecist) μ vara ett positivt mått i R. Det så kallade räknemåttet c_R i R, som definieras av att $c_R(A)$ är lika med antalet element i A för varje $A \in 2^R$, är ett exempel på ett positivt mått. Diracmåttet δ_a i en given punkt $a \in R$ definieras av att

$$\delta_a(A) = 1_A(a)$$

för varje $A \in 2^R$. Egentligen borde Diracmåttet δ_a ha ytterligare ett index, nämligen R, men vi följer den gängse konventionen och utelämnar R.

Positiva mått definierade på σ-algebran $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ kallas för positiva Borelmått i $\mathbf{R}^n$. Om vi talar om ett positivt mått i $\mathbf{R}^n$ är det underförstått att måttet är ett positivt Borelmått om inte annat anges. Det finns exakt ett positivt mått m på σ-algebran $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ sådant att

$$m([a, b]) = b - a$$

för varje $a \leq b$, där $a, b \in \mathbf{R}$. Måttet m kallas för Lebesguemåttet i $\mathbf{R}$. Existensen av detta mått är relativt svår att komma åt och faller utanför ramen för denna framställning. Observera att

$$m(\mathbf{Q}) = 0$$

ty om $q_0, q_1, q_2, ...$ är en uppräkning av de rationella talen $\mathbf{Q}$ så följer att

$$m(\mathbf{Q}) = m(\bigcup_{n=0}^{\infty} \{q_n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} m(\{q_n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0.$$

Om $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ definieras

$$\mathcal{B}_B(\mathbf{R}) = \{A \in \mathcal{B}(\mathbf{R});\ A \subseteq B\}.$$

Observera att $\mathcal{B}_B(\mathbf{R})$ är en σ-algebra av delmängder av B. Måttet m_B definierat av ekvationen

$$m_B(A) = m(A),\ A \in \mathcal{B}_B(\mathbf{R})$$

kallas för Lebesguemåttet i B. Vi skriver $\mathcal{B}_{[a,b]}(\mathbf{R}) = \mathcal{B}\,[a,b]$ om a och b är reella och $a < b$.

Om R är en ändlig mängd kan vi på ett mycket konkret sätt beskriva alla σ-algebror av delmängder av R och motsvarande mått. För att förklara detta antar vi först att $A_1, ..., A_n$ är parvis disjunkta delmängder av R vars union är lika med R dvs

$$A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$$

och

$$\bigcup_{i \in \{1,...,n\}} A_i = R.$$

Under dessa omständigheter sägs $(A_i)_{i=1}^n$ vara en partition av R. Vi definierar

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i;\ I \text{ godtyckliglig delmängd av } \{1, ..., n\} \right\}.$$

Klassen $\mathcal{A}$ är en σ-algebra. Observera att

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset \text{ om } I = \emptyset.$$

Omvänt om $\mathcal{A}$ är en σ-algebra av delmängder av den ändliga mängden R så låter vi $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ vara klassen av alla $A \in \mathcal{A}$ som har följande minimalegenskap, nämligen

$$B \in \mathcal{A},\ B \subseteq A,\ B \neq \emptyset \Rightarrow B = A.$$

Definitionen innebär att $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ består exakt av de element A i $\mathcal{A}$ som inte har någon icke-tom delmängd skild från A i σ-algebran $\mathcal{A}$. Klassen $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ är en partition av R och om $\mathcal{P}(\mathcal{A}) = (A_i)_{i=1}^n$ så är

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{i \in I(A)} A_i;\ I \text{ godtyckliglig delmängd av } \{1, ..., n\} \right\}.$$

För godtyckligt R finns ingen liknande beskrivning av σ-algebror av delmängder av R.

Om $(R, \mathcal{A})$ är ett mätbart rum och mängden R är ändlig så kan vi lätt beskriva alla positiva mått definierade på σ-algebran $\mathcal{A}$. För att se detta antag σ-algebran $\mathcal{A}$ definierar partitionen $\mathcal{P}(\mathcal{A}) = (A_i)_{i=1}^n$ av R. Om $A \in \mathcal{A}$ definieras $I(A) = \{i; i \in \{1, ..., n\}$ och $A_i \subseteq A\}$ och det följer att

$$A = \bigcup_{i \in I(A)} A_i.$$

Om μ är ett positivt mått definierat på σ-algebran $\mathcal{A}$ så är

$$\mu(A) = \sum_{i \in I(A)} \mu(A_i).$$

Omvänt kan vi definiera ett positivt mått μ på σ-algebran $\mathcal{A}$ utifrån givna $a_1, ..., a_n \in [0, \infty]$ genom att definiera

$$\mu(A) = \sum_{i \in I(A)} a_i,\ A \in \mathcal{A}.$$

Så snart ett positivt måttrum $(R, \mathcal{A}, \mu)$ är givet kan man definiera en integral

$$\int_R f(x) d\mu(x)$$

förutsatt att f uppfyller lämpliga villkor. En funktion $f : R \to \mathbf{R}$ sägs vara en enkel mätbar funktion om funktionens värdemängd V_f är ändlig och $\{x \in R;\ f(x) = y\} \in \mathcal{A}$ för varje reellt tal y. Om V_f består av de parvis olika talen $y_k \in \mathbf{R}$, $k = 1, ..., n$, och

$$A_k = \{x \in R;\ f(x) = y_k\},\ k = 1, ..., n$$

så kan vi skriva

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k 1_{A_k}(x), \; x \in R.$$

Vi definierar μ-integralen av funktionen f genom formeln

$$\int_R f(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \mu(A_k).$$

Här definieras $0 \cdot \infty = 0$, vilket är standard inom mått- och integrationsteori. Innan definitionen av μ-integral generaliseras till allmännare funktioner behövs ett nytt abstrakt begrepp nämligen begreppet mätbar funktion.

Om R_0 och R_1 är två mängder och $f : R_0 \to R_1$ en funktion så definieras

$$f^{-1}(A) = \{x \in R_0; f(x) \in A\}$$

så snart $A \subseteq R_1$. Mängden $f^{-1}(A)$ kallas inversa bilden av A under avbildningen f. Det gäller att

$$f^{-1}(R_1 \setminus A) = R_0 \setminus f^{-1}(A).$$

Att bilda inversa bilder är ganska naturligt. T ex gäller att en funktion $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ är kontinuerlig om och endast om $f^{-1}(A)$ är öppen i $\mathbf{R}^m$ för varje öppen mängd A i $\mathbf{R}^n$.

Antag nu att $(A_j)_{j \in J}$ är en godtycklig familj delmängder av R_1. Av definitionerna följer att

$$f^{-1}(\bigcap_{j \in J} A_j) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(A_j)$$

och

$$f^{-1}(\bigcup_{j \in J} A_j) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(A_j).$$

Om $(R_1, \mathcal{A}_1)$ är ett mätbart rum och $f : R_0 \to R_1$ så definieras

$$f^{-1}(\mathcal{A}_1) = \left\{ f^{-1}(A);\; A \in \mathcal{A}_1 \right\}.$$

Härav följer att $f^{-1}(\mathcal{A}_1)$ är en σ-algebra av delmängder av R_0. Denna betecknas ofta $\sigma(f)$ om missförstånd ej kan inträffa. Antag nu att $(R_0, \mathcal{A}_0)$ och $(R_1, \mathcal{A}_1)$ är två mätbara rum och $f : R_0 \to R_1$ en funktion sådan att

$$\sigma(f) = f^{-1}(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{A}_0.$$

Funktionen f sägs i detta fall vara $(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1)$-mätbar eller helt enkelt bara mätbar om missförstånd ej kan inträffa. En $(\mathcal{B}(\mathbf{R}^m), \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))$-mätbar funktion $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ kallas en Borelfunktion. Inom klassisk analys spelar mätbarhetsbegreppet en ganska liten roll. Det är främst genom sannolikhetsteorin begreppet fått stor betydelse och vi får efterhand se varför.

Vi återvänder nu till vårt positiva måttrum $(R, \mathcal{A}, \mu)$. Delintervall av $\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ tilldelas i fortsättningen alltid den σ-algebra som genereras av delintervallen av intervallet ifråga. Om $f : R \to [0, +\infty]$ är mätbar definieras integralen av f över R med avseende på måttet μ genom

$$\int_R f(x) d\mu(x)$$

$$= \sup \left\{ \int_R g(x) d\mu(x); \text{ där } g \text{är enkel mätbar och } 0 \leq g \leq f \right\}.$$

Om f är en icke-negativ enkel mätbar funktion sammanfaller denna definition av μ-integralen av f med den tidigare.

Sats 1. (Lebesgues monotona konvergenssats) *Antag* $(R, \mathcal{A}, \mu)$ *är ett positivt måttrum och antag att* $f_n : R \to [0, \infty]$, $n \in \mathbf{N}$, är *en följd mätbara funktioner sådan att* $f_n \leq f_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$, *och*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ x \in R.$$

Då gäller att f *är mätbar och*

$$\lim_{n\to\infty} \int_R f_n(x) d\mu(x) = \int_R f(x) d\mu(x).$$

Antag $f : R \to [0, +\infty]$ är mätbar. Man kan visa att det finns icke-negativa enkla mätbara funktioner f_n, $n \in \mathbf{N}$, sådana att $f_n \leq f_{n+1}$ och

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \text{ alla } x \in R.$$

Antag nämligen att $n \in \mathbf{N}_+$ och sätt $E_{n,i} = f^{-1}(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right[\ )$, $1 \leq i \leq n2^n$, $F_n = f^{-1}([n, \infty])$ och

$$f_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} 1_{E_{n,i}} + n 1_{F_n}.$$

Definitionerna ger (efter en stunds arbete) att $f_n \leq f_{n+1}$ och

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \text{ alla } x \in R.$$

Lebesgues monotona konvergenssats medför nu att

$$\int_R f(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_R f_n(x)d\mu(x).$$

Vi skriver $f \in L^1(\mu)$ eller eventuellt för tydlighets skull $f \in L^1(R, \mathcal{A}, \mu)$ om $f : R \to [-\infty, +\infty]$ är mätbar och $f^+ = \max(0, f)$ och $f^- = \max(0, -f)$ har ändliga integraler över R med avseende på måttet μ. I detta fall definieras

$$\int_R f(x)d\mu(x) = \int_R f^+(x)d\mu(x) - \int_R f^-(x)d\mu(x).$$

Om f är en enkel mätbar funktion sammanfaller denna definition av μ-integralen av f med den tidigare. Man kan visa att

$$\int_R \alpha f(x)d\mu(x) = \alpha \int_R f(x)d\mu(x)$$

om $f \in L^1(\mu)$ och $\alpha \in \mathbf{R}$. Relationen

$$\int_R (f(x) + g(x))d\mu(x) = \int_R f(x)d\mu(x) + \int_R g(x)d\mu(x)$$

gäller förutsatt att $f, g \in L^1(\mu)$ endast antar ändliga värden (så att summan $f + g$ är definierad). Den senare begränsningen elimineras nedan.

Om $A \in \mathcal{A}$ och $f \in L^1(\mu)$, definieras

$$\int_A f(x)d\mu(x) = \int_R 1_A(x)f(x)d\mu(x).$$

I specialfallet att $R = \mathbf{R}$ och A är ett begränsat intervall med vänsterändpunkten a och högerändpunkten b skrivs

$$\int_A f(x)d\mu(x) = \int_a^b f(x)d\mu(x)$$

förutsatt att $\mu(\{a, b\}) = 0$. Om $a, b \in \mathbf{R}$ definieras integralerna

$$\int_a^\infty f(x)d\mu(x)$$

och
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)d\mu(x)$$
på liknande sätt förutsatt att $\mu(\{a\}) = 0$ i första fallet och $\mu(\{b\}) = 0$ i andra fallet. Vi skriver också
$$\int_{\mathbf{R}} f(x)d\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)d\mu(x).$$

Om $f \in C\,[a,b]$ dvs om f är en reellvärd kontinuerlig funktion definierad i det kompakta intervallet $[a,b]$ och m som vanligt betecknar Lebesguemåttet i $\mathbf{R}$ så gäller att
$$\int_{a}^{b} f(x)dm(x) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$
där integralen i högra ledet är en vanlig Riemannintegral.

Antag nu att $(R, \mathcal{A}, \mu)$ och $(R, \mathcal{A}, \nu)$ är två positiva måttrum. Då är $\mu+\nu$ ett positivt mått och för varje $f \in L^1(\mu) \cap L^1(\nu)$ gäller att
$$\int_R f(x)d(\mu+\nu)(x) = \int_R f(x)d\mu(x) + \int_R f(x)d\nu(x).$$
Vidare gäller för varje $f \in L^1(\mu)$ och $\alpha \in [0,\infty[$ att
$$\int_R f(x)d(\alpha\mu)(x) = \alpha \int_R f(x)d\mu(x).$$

Definitionerna ovan ger att
$$\int_R f(x)d\delta_a(x) = f(a).$$
Om $a, b \in R$ och $\alpha, \beta \in [0,\infty[$ så uppfyller det positiva måttet $\mu = \alpha\delta_a + \beta\delta_b$ relationen
$$\int_R f(x)d\mu(x) = \alpha f(a) + \beta f(b).$$

Om $(R, \mathcal{A}, \mu)$ är ett positivt måttrum och $f : R \to [0,\infty]$ är mätbar så följer av Lebesgues monotona konvergenssats att funktionen
$$\nu(A) = \int_A f(x)d\mu(x),\ A \in \mathcal{A}$$
är ett positivt mått. Detta mått betecknas med $f\mu$ dvs $\nu = f\mu$. Vi skriver också
$$d\nu(x) = f(x)d\mu(x)$$

eller ibland kompaktare

$$d\nu = f d\mu$$

vilket motiveras av att

$$\int_R g(x)d\nu(x) = \int_R g(x)f(x)d\mu(x)$$

för varje mätbar funktion g: $R \to [0,\infty]$. I fallet $\mu = m$ skrivs också

$$dm(x) = dx.$$

Måttet γ i $\mathbf{R}$ definierat av ekvationen

$$d\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

kallas för det kanoniska Gaussmåttet i $\mathbf{R}$. Det gäller att $\gamma(\mathbf{R}) = 1$,

$$\int_{\mathbf{R}} x d\gamma(x) = 0$$

och

$$\int_{\mathbf{R}} x^2 d\gamma(x) = 1.$$

De sannolikhetsteoretiska grundbegreppen går ofta bra att beskriva med måtteorins språk. Om $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ är ett sannolikhetsrum så kallas, inom sannolikhetsteorin, en mätbar funktion $X : \Omega \to \mathbf{R}$ för en reellvärd stokastisk variabel. Det är här underförstått att $\mathbf{R}$ är tilldelad σ-algebran $\mathcal{B}(\mathbf{R})$. Om $X \in L^1(P)$ definieras väntevärdet $E[X]$ av X genom formeln

$$E[X] = \int_\Omega X(\omega)dP(\omega)$$

eller tydligare

$$E^P[X] = \int_\Omega X(\omega)dP(\omega).$$

Råkar dessutom $A \in \mathcal{F}$ definieras

$$E[X; A] = \int_A X(\omega)dP(\omega).$$

Antag nu att $(R, \mathcal{A})$ är ett godtyckligt mätbart rum. En mätbar avbildning $X : \Omega \to R$ kallas för en R-värd stokastisk variabel. Denna inducerar ett så kallat fördelningsmått μ_X genom ekvationen

$$\mu_X(A) = P[X \in A], \ A \in \mathcal{A}$$

dvs om $A \in \mathcal{A}$ så är $\mu_X(A)$ lika med sannolikheten för att händelsen $[X \in A] = \{\omega;\ X(\omega) \in A\}$ inträffar. Om vi definierar en funktion

$$j_X : R \to R$$

genom att sätta $j_X(x) = x,\ x \in R$, så kan vi uppfatta j_X som en R-värd stokastisk variabel relativt sannolikhetsrummet $(R, \mathcal{A}, \mu_X)$. Konstruktionen visar att X och j_X har samma fördelningsmått, nämligen μ_X. Den stokastiska variabeln j_X kallas ibland för den första kanoniska representationen av X. Med Lebesgues monotona konvergenssats visas att om $f : R \to [-\infty, \infty]$ är mätbar så gäller att $f(X) \in L^1(P)$ om och endast om $f \in L^1(\mu_X)$ och i förekommande fall gäller

$$E\left[f(X)\right] = \int_R f(x)d\mu_X(x).$$

Om X är reellvärd och

$$E\left[X^2\right] = \int_R x^2 d\mu_X(x)$$

är ändlig så följer av Jensens olikhet att

$$E\left[\mid X \mid\right] \leq \sqrt{E\left[X^2\right]} < \infty.$$

I detta fall definieras variansen $\mathrm{Var}(X)$ av X av uttrycket

$$\mathrm{Var}(X) = E\left[(X - E\left[X\right])^2\right].$$

En kalkyl ger

$$\mathrm{Var}(X) = E\left[X^2\right] - (E\left[X\right])^2.$$

En stokastisk variabel $X : \Omega \to R$ sägs ha en 2-punktsfördelning om det existerar $a, b \in R$ sådana att $a \neq b$ och $P\left[X = a\right] + P\left[X = b\right] = 1$, där varje term i vänster led är positiv. Sätt $P\left[X = a\right] = p_a$ och $P\left[X = b\right] = p_b$. Råkar $R = \mathbf{R}$ så är $E\left[X\right] = p_a a + p_b b$ och $\mathrm{Var}(X) = p_a p_b (a - b)^2$.

En stokastisk variabel X med värden i en ändlig mängd R med n element säges ha en likformig fördelning i R om $\mu_X = \frac{1}{n} c_R$.

En stokastisk variabel X sägs ha en likformig fördelning i intervallet $[a, b]$, där $a < b$, om

$$\mu_X(A) = \frac{1}{b - a} m(A),\ A \in \mathcal{B}\left[a, b\right]$$

dvs
$$\mu_X = \frac{1}{b-a} m_{[a,b]}.$$
I detta fall gäller att $E[X] = (b-a)/2$ och $\mathrm{Var}(X) = (b-a)^2/12$.

En reellvärd stokastisk variabel X med fördelningsmåttet γ sägs ha en $N(0,1)$-fördelning. Detta skrivs $X \in N(0,1)$ och motsvarande fördelningsfunktion betecknas med Φ dvs
$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{y} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}},\ y \in \mathbf{R}.$$
Inom matematisk finans skrivs ofta N istället för Φ.

En reellvärd stokastisk variabel X sägs ha en $N(\alpha, \sigma^2)$-fördelning om $\alpha \in \mathbf{R}$, $\sigma \geq 0$ och $X = \alpha + \sigma Y$, där $Y \in N(0,1)$. En reellvärd stokastisk variabel sägs ha en normalfördelning om den är $N(\alpha, \sigma^2)$-fördelad för lämpliga $\alpha \in \mathbf{R}$, $\sigma \geq 0$. En reellvärd normalfördelad stokastisk variabel sägs ofta ha en Gaussisk fördelning.

För att illustrera begreppen ovan gör vi nu en liten paus i den allmänna måtteorin och återknyter till binomialmodellen som vi behandlade utförligt i kursen Optioner och matematik.

Exempel 1. Betrakta binomialmodellen för en aktie och en obligation och med ett tidssteg. Här antager tidsvariabeln t två värden, nämligen 0 eller 1. Vi skriver
$$B(1) = B(0)e^r$$
där $B(0)$ och r är positiva konstanter och
$$S(1) = S(0)e^X$$
där $S(0)$ är en positiv konstant och X är en reellvärd 2-punktsfördelad stokastisk variabel sådan att $X^{-1}(\{u,d\}) = \Omega$ för lämpliga $u, d \in \mathbf{R}$ som uppfyller $u > d$. Genom att eventuellt ersätta X med j_X kan vi antaga att $\Omega = \{u, d\}$, $X(\omega) = \omega$, $\omega \in \Omega$, och $P = \mu_X$. Sätt
$$p_u = P[X = u]$$
och
$$p_d = P[X = d]$$

där $0 < p_u, p_d < 1$ och $p_u + p_d = 1$. Det gäller alltså att

$$P = p_u \delta_u + p_d \delta_d.$$

Måttet P kallas det fysikaliska måttet för binomialmodellen med ett tidssteg.

I det följande förutsätts att $u > r > d$ så att modellen saknar arbitrage.

Om ett betingat kontrakt av europeisk typ utbetalar beloppet $Y = f(X)$ vid tiden 1 så ges derivatets värde vid tiden $t = 0$ av formeln

$$\Pi_Y(0) = e^{-r}(q_u f(u) + q_d f(d)).$$

där

$$q_u = \frac{e^r - e^d}{e^u - e^d}$$

och

$$q_d = \frac{e^u - e^r}{e^u - e^d}.$$

Genom att definiera

$$Q = q_u \delta_u + q_u \delta_d$$

så följer att

$$\Pi_Y(0) = e^{-r} \int_\Omega f(\omega) dQ(\omega)$$

eller

$$\Pi_Y(0) = e^{-r} E^Q[Y]$$

eftersom $Y = f(X)$ och $X(\omega) = \omega$, $\omega \in \Omega$. Sannolikhetsmåttet Q kallas för det riskneutrala måttet eller det ekvivalenta martingalmåttet för binomialmodellen med ett tidssteg. []

Exempel 2. Inom klassisk analys är det i regel tillräckligt att arbeta med stora σ-algebror. Sannolikhetsteori och finansiell matematik är på denna punkt annorlunda. För att belysa detta går vi tillbaka till binomialmodellen med T tidssteg. I detta fall ges aktiepriset vid tiden t av ekvationen

$$S(t) = S(0)e^{X_1 + \ldots + X_t}$$

där $S(0)$ är en känd konstant och $X_1, ..., X_T$ är stokastiskt oberoende likafördelade 2-punktsfördelade stokastiska variabler. Vi antager att varje X_t endast kan antaga två värden nämligen u eller d, där $u > d$. Låt $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ och

$\mathcal{F}_t = \sigma(X^t)$ där $X^t = (X_1, ..., X_t)$ för $t = 1, ..., T$. Följande resonemang visar att en $(\mathcal{F}_t, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$-mätbar stokastisk variabel $Y : \Omega \to \mathbf{R}$ är likvärdig med en reellvärd funktion av X^t dvs en funktion av aktiepriserna $S(1), ..., S(t)$. Vi kan därför uppfatta $\mathcal{F}_t$ som den kända informationen vid tiden t.

Antag först att $Y = f(X^t)$, där $f : \{u, d\}^t \to \mathbf{R}$, och låt A vara en Borelmängd i $\mathbf{R}$. Det gäller att

$$Y^{-1}(A) = (X^t)^{-1}(f^{-1}(A))$$

och eftersom $f^{-1}(A)$ är en ändlig delmängd av $\mathbf{R}^t$ gäller att $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^t)$. Vi har därmed visat att $Y^{-1}(A) \in \sigma(X^t)$ så Y är $(\mathcal{F}_t, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$-mätbar.

Antag omvänt att Y är $(\mathcal{F}_t, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$-mätbar. Eftersom X^t endast antar ändligt många värden består $\mathcal{F}_t$ endast av ändligt många mängder och genereras alltså av en partition $(A_i)_{i=1}^m$, bestående av mängderna $(X^t)^{-1}(\{a\})$, där $a \in \{u, d\}^t$. Eftersom mängden $Y^{-1}(\{r\})$, för varje reellt tal r, är en union av ett urval av mängderna $A_1, ..., A_m$ kan Y endast antaga ett konstant värde i varje mängd A_i. Om $a \in \{u, d\}^t$ och $\omega \in (X^t)^{-1}(\{a\})$ definieras $f(a) = Y(\omega)$ och det följer att $Y = f(X^t)$.

Det finns också kontinuerliga versioner av ovanstående. Doob-Dynkins lemma säger följande. Antag $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ är ett sannolikhetsrum och $X, Y : \Omega \to \mathbf{R}$ två funktioner. Då Y är en $(\sigma(X), \mathcal{B}(\mathbf{R}))$-mätbar funktion om och endast om det finns en Borelfunktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sådan att $Y = f(X)$. []

Antag $(R, \mathcal{A}, \mu)$ är ett positivt måttrum. En mängd $A \in \mathcal{A}$ sägs vara en μ-nollmängd eller (om missförstånd ej kan inträffa) en nollmängd om $\mu(A) = 0$. Ett påstående $P(x)$, där $x \in R$, som gäller för alla x utanför en lämplig μ-nollmängd sägs gälla n.ö. $[\mu]$ eller om missförstånd ej kan inträffa helt enkelt n.ö. Förkortningen n.ö. uttalas "nästan överallt". Måttrummet $(R, \mathcal{A}, \mu)$ säges vara komplett om mängden

$$\mathcal{N}_\mu(\mathcal{A}) = \{B;\ B \subseteq A \text{ för något } A \in \mathcal{A} \text{ med } \mu(A) = 0\}$$

är en delmängd av $\mathcal{A}$. Vi definierar

$$\mathcal{A}_\mu = \{E;\ \text{det existerar } A, B \in \mathcal{A} \text{ så att } A \subseteq E \subseteq B \text{ och } \mu(B \backslash A) = 0\}.$$

Man kan visa att $\mathcal{A}_\mu$ är en σ-algebra och den kallas för μ-kompletteringen av $\mathcal{A}$. Om $E \in \mathcal{A}_\mu$ finns $A, B \in \mathcal{A}$ så att $A \subseteq E \subseteq B$ och $\mu(B \backslash A) = 0$.

Genom att definiera $\nu(E) = \mu(A)$ blir ν ett positivt mått. Måttet ν kallas för utvidgningen av måttet μ till σ-algebran $\mathcal{A}_\mu$. Måttrummet $(R, \mathcal{A}_\mu, \nu)$ är komplett. Om μ är ett sannolikhetsmått sägs ofta "med sannolikhet ett" eller "nästan säkert" istället för "nästan överallt". Uttrycket "nästan säkert" förkortas n.s. Man kallar m-kompletteringen av Borel-σ-algebran i $\mathbf{R}$ för Lebesgue-σ-algebran i $\mathbf{R}$.

Om $0 \leq f \in L^1(\mu)$ följer av olikheterna

$$\infty > \int_R f(x)d\mu(x) \geq s\mu(f^{-1}([s, +\infty]))$$

$$\geq s\mu(f^{-1}(\{+\infty\})),\ 0 < s < \infty$$

att

$$\mu(\{x \in R; f(x) = \infty\}) = 0$$

dvs mängden $\{x \in R; f(x) = \infty\}$ är en nollmängd. Alltså är f reellvärd n.ö. För två funktioner $f, g \in L^1(\mu)$ som är lika n.ö. gäller att

$$\int_R f(x)d\mu(x) = \int_R g(x)d\mu(x).$$

Två funktioner i $L^1(\mu)$ som är lika n.ö. $[\mu]$ identifieras från och med nu. Varje $f \in L^1(\mu)$ har med denna konvention en reellvärd kopia i $L^1(\mu)$ och det är härigenom möjligt att definiera summan av två funktioner i $L^1(\mu)$. Det erbjuder heller inga svårigheter att definiera multiplikation av funktion i $L^1(\mu)$ med skalär. Härigenom blir $L^1(\mu)$ ett vektorrum och man kan visa att avbildningen

$$f \to \int_R f(x)d\mu(x)$$

är en linjär avbildning från $L^1(\mu)$ in i $\mathbf{R}$.

Om $f \in L^1(\mu)$ definieras den så kallade $L^1(\mu)$-normen av f genom att

$$\| f \|_1 = \int_R | f(x) | d\mu(x).$$

Följande egenskaper kan verifieras, nämligen

$(i) \|\alpha f\|_1 = | \alpha | \, \|f\|_1,\ \alpha \in \mathbf{R}$
$(ii)\ \|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$
$(iii)\ \|f\|_1 \geq 0$ med likhet om och endast om $f = 0$ i $L^1(\mu)$.

Man säger att rummet $L^1(\mu)$ tillsammans med $L^1(\mu)$-normen bildar ett normerat rum. Om $f, g \in L^1(\mu)$ uppfattar vi

$$\|f - g\|_1$$

som avståndet mellan f och g. Vi säger att en sekvens $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ i $L^1(\mu)$ konvergar mot $f \in L^1(\mu)$ om

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0.$$

Detta kan på kompakt vis uttryckas

$$f_n \to f \quad \text{i } L^1(\mu)$$

då $n \to \infty$.

Sats 2. (Lebesgues majorantsats) *Antag $f_n \in L^1(\mu)$, $n \in \mathbf{N}$, och att det finns en icke-negativ funktion $g \in L^1(\mu)$ sådan att*

$$| f_n | \leq g, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Antag vidare att gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

existerar och är lika med $f(x)$ n.ö. $[\mu]$. *Då gäller att $f \in L^1(\mu)$* och

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0.$$

Speciellt gäller att

$$\lim_{n\to\infty} \int_R f_n(x) d\mu(x) = \int_R f(x) d\mu(x).$$

Exempel 3. Brownsk rörelse har en serie märkliga egenskaper. Om $T > 0$ är fixt så har t ex kurvan $(t, W(t)), 0 \leq t \leq T$, oändlig längd. För att se detta definieras

$$L_n^{(1)} = \sum_{k=0}^{2^n-1} | W(\frac{k+1}{2^n}T) - W(\frac{k}{2^n}T) |$$

så att $L_n^{(1)} \leq L_{n+1}^{(1)}$. Vidare gäller att

$$E\left[e^{-L_n^{(1)}}\right] = \left(E\left[e^{-|W(\frac{1}{2^n}T)|}\right]\right)^{2^n}$$

$$= \left(E\left[e^{-\frac{1}{2^{n/2}}|W(T)|}\right]\right)^{2^n} \leq \left(E\left[e^{-|W(T)|}\right]\right)^{2^{n/2}}$$

där vi har uttnyttjat Jensens olikhet i sista ledet. Eftersom $E\left[e^{-|W(T)|}\right] < 1$ följer nu av Lebesgues majorantsats att

$$E\left[\lim_{n\to\infty} e^{-L_n^{(1)}}\right] = \lim_{n\to\infty} E\left[e^{-L_n^{(1)}}\right] = 0$$

och därmed är

$$\lim_{n\to\infty} L_n^{(1)} = \infty \text{ n.s.}$$

Speciellt följer härav att kurvan $(t, W(t)), 0 \leq t \leq T$, har oändlig längd. []

Följande fundamentala resultat av Lebesgue är ofta användbart.

Sats 3. (Lebesgues version av integralkalkylens huvudsats) *Antag $f \in L^1[0,T]$ och definiera*

$$F(t) = \int_0^t f(u)du, \ \ 0 \leq t \leq T.$$

Då är derivatan $F' = f$ n.ö. med avseende på Lebesguemåttet i $[0,T]$.

Vi definierar klassen

$$L^2(R, \mathcal{A}, \mu) = \left\{f; f \text{ mätbar och } f^2 \in L^1(R, \mathcal{A}, \mu)\right\}.$$

Om missförstånd ej kan uppstå skrivs $L^2(R, \mathcal{A}, \mu) = L^2(\mu)$. Två funktioner i $L^2(\mu)$ som är lika n.s. $[\mu]$ identifieras. Man definierar summa och skalärmultiplikation i $L^2(\mu)$ analogt med motsvarande operationer i rummet $L^1(\mu)$ och härigenom blir $L^2(\mu)$ ett vektorrum. Funktionen

$$(f, g) = \int_R f(x)g(x)d\mu(x), \ \ f, g \in L^2(\mu)$$

kallas för skalärprodukten i $L^2(\mu)$ och om $f \in L^2(\mu)$ definieras

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_R f^2(x)d\mu(x)}.$$

Detta uttryck kallas för $L^2(\mu)$-normen av f. Man kan visa Cauchy -Schwarz olikhet

$$(f,g) \leq \|f\|_2\|g\|_2$$

och att

$(i)\|\alpha f\|_2 =| \alpha | \ \|f\|_2,\ \alpha \in \mathbf{R}$
$(ii)\ \|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$
$(iii)\ \| f \|_2 \geq 0$ med likhet om och endast om $f = 0$ i $L^2(\mu)$.

Man säger att rummet $L^2(\mu)$ tillsammans med skalärprodukten (f,g) bildar ett prehilbertrum (vi får t o m ett Hilbertrum men vi går inte in på detta begrepp förrän i nästa kapitel). Om $f, g \in L^2(\mu)$ uppfattas

$$\|f-g\|_2$$

som avståndet mellan f och g. Vi säger att en sekvens $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ i $L^2(\mu)$ konverger mot $f \in L^2(\mu)$ om

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0.$$

Detta kan på kompakt vis uttryckas

$$f_n \to f \quad \text{i } L^2(\mu)$$

då $n \to \infty$.

I fortsättningen låter vi $L^2[0,T]$ beteckna rummet $L^2(m_{[0,T]})$ (jmfr kapitel 1). Rummet $L^1(m_{[0,T]})$ kommer ofta att betecknas med $L^1[0,T]$.

Om mängden R är ändlig har vektorrummet $L^2(\mu)$ ändlig dimension. Om denna dimension betecknas med n så kan motsvarande prehilbertrum $L^2(\mu)$ identifieras med $\mathbf{R}^n$ och den vanliga skalärprodukten i $\mathbf{R}^n$.

Rummet $L^2(P)$ är mycket viktigt, som vi skall se senare under denna kurs. Observera att Jensens olikhet ger

$$L^2(P) \subseteq L^1(P).$$

Om $X \in L^2(P)$ gäller att

$$\mathrm{Var}(X) = \|X - E[X]\|_2^2.$$

Kovariansen mellan två stokastiska variabler $X, Y \in L^2(P)$ definieras av

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

och om X, Y ej är kontanta n.s. definieras korrelationen mellan dem genom

$$\mathrm{Cor}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}.$$

Två stokastiska variabler $X, Y \in L^2(P)$ sägs vara okorrelerade om $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Exempel 4. Antag n är ett positivt heltal och sätt $h = T/n$ och $t_k = kh$, $k = 0, 1, ..., n$. Vi definierar

$$L_n^{(2)} = \sum_{k=0}^{n-1} (W(t_{k+1}) - W(t_k))^2$$

och påstår att

$$L_n^{(2)} \to T \text{ i } L^2(P) \text{ då } n \to \infty.$$

Om $G \in N(0,1)$ följer nämligen att

$$\mathrm{Var}(L_n^{(2)}) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Var}((W(t_{k+1}) - W(t_k))^2) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Var}((\sqrt{t_{k+1} - t_k} G)^2)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k)^2 \mathrm{Var}(G^2) \leq \frac{T^2}{n} \mathrm{Var}(G^2).$$

Eftersom

$$E\left[L_n^{(2)}\right] = T$$

följer nu att

$$E\left[(L_n^{(2)} - T)^2\right] \to 0 \text{ då } n \to 0.$$

Antag nu vi har en godtycklig indelning

$$\triangle : \; 0 = t_0 < t_2 < ... < t_n = T$$

av intervallet $[0, T]$. Indelningens finhet $\delta_\triangle$ definieras av att

$$\delta_\triangle = \max_{k \in \{0,\ldots,n-1\}} (t_{k+1} - t_k).$$

Vi bildar

$$L_\triangle^{(2)} = \sum_{k=0}^{n-1} (W(t_{k+1}) - W(t_k))^2.$$

En justering av beviset ovan visar att

$$L_\triangle^{(2)} \to T \text{ i } L^2(P) \text{ då indelningens finhet } \to 0$$

med föjande innebörd: till varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så

$$E\left[(L_\triangle^{(2)} - T)^2\right] < \varepsilon$$

för varje indelning av intervallet $[0, T]$ om uppfyller $\delta_\triangle < \delta$. Vi möter här konvergens av ett så kallat nät. []

Antag återigen att $(R, \mathcal{A}, \mu)$ är ett positivt måttrum. Vi låter $L^\infty(R, \mathcal{A}, \mu)$ beteckna rummet av alla $\mathcal{A}$-mätbara funktioner $f : R \to [-\infty, +\infty]$ sådana att mängden

$$\{x \in R; \ \mid f(x) \mid > a\}$$

är en nollmängd för ett lämpligt reellt tal a. Om $f \in L^\infty(R, \mathcal{A}, \mu)$ definieras $\|f\|_\infty$ som infimum över alla reella tal a sådana att

$$\mu(\{x \in R; \ \mid f(x) \mid > a\}) = 0.$$

Två funktioner i $L^\infty(R, \mathcal{A}, \mu)$ identifieras om de är lika n.s. $[\mu]$. Vi skriver ofta $L^\infty(R, \mathcal{A}, \mu) = L^\infty(\mu)$ om missförstånd inte kan inträffa. Man kan visa att

$(i) \|\alpha f\|_\infty = \mid \alpha \mid \|f\|_\infty$, $\alpha \in \mathbf{R}$
(ii) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$
(iii) $\| f \|_\infty \geq 0$ med likhet om och endast om $f = 0$ i $L^\infty(\mu)$.

Rummet $L^0(R, \mathcal{A}, \mu)$ betecknar mängden av alla $\mathcal{A}$-mätbara funktioner $f : R \to [-\infty, +\infty]$ sådana att mängden

$$\{x \in R; \ \mid f(x) \mid = \infty\}$$

är en μ-nollmängd. Avståndet $d(f,g)$ mellan två funktioner f och g i detta rum definieras genom formeln

$$d(f,g) = \int_R \frac{| f(x) - g(x) |}{1+ | f(x) - g(x) |} d\mu(x).$$

Två funktioner i $L^0(R, \mathcal{A}, \mu)$ identifieras om de är lika n.s. $[\mu]$. Vi skriver ofta $L^0(R, \mathcal{A}, \mu) = L^0(\mu)$ om missförstånd inte kan inträffa. Följande egenskaper kan verifieras, nämligen

(*i*) $d(f,g) = d(g,f)$
(*ii*) $d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$
(*iii*) $d(f,g) \geq 0$ med likhet om och endast om $f = 0$ i $L^0(\mu)$.

Man säger att en sekvens $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ i $L^0(\mu)$ konvergerar mot $f \in L^0(\mu)$ om

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0.$$

Notera att konvergens i sannolikhet är samma sak som konvergens i $L^0(P)$.

Ett positivt måttrum $(R, \mathcal{A}, \mu)$ sägs vara σ-ändligt om det existerar A_n, $n \in \mathbf{N}$, så att $R = \cup_{n\in\mathbf{N}} A_n$ och $\mu(A_n) < \infty$, $n \in \mathbf{N}$. Betrakta nu två positiva σ-ändliga måttrum $(R_k, \mathcal{A}_k, \mu_k)$, $k = 1, 2$. Vi definierar produktrummet

$$R_1 \times R_2 = \{(x_1, x_2);\ x_1 \in R_1 \text{ och } x_2 \in R_2\}$$

och låter $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ beteckna σ-algebran av delmängder av $R_1 \times R_2$ som genereras av alla mängder av typen

$$A_1 \times A_2,\ A_1 \in \mathcal{A}_1,\ A_2 \in \mathcal{A}_2.$$

Man kan visa att det existerar ett unikt positivt mått, här betecknat med $\mu_1 \times \mu_2$, definierat på σ-algebran $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, sådant att

$$(\mu_1 \times \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2),\ A_1 \in \mathcal{A}_1,\ A_2 \in \mathcal{A}_2.$$

Vidare gäller för varje mätbar funktion $f : R_1 \times R_2 \to [0, \infty]$ att

$$\int_{R_1\times R_2} f(x_1, x_2) d(\mu_1 \times \mu_2)(x_1, x_2) = \int_{R_2} (\int_{R_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1)) d\mu_2(x_2)$$

och

$$\int_{R_1\times R_2} f(x_1, x_2) d(\mu_1 \times \mu_2)(x_1, x_2) = \int_{R_1} (\int_{R_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2)) d\mu_1(x_1).$$

Detta resultat kallas Fubinis sats.

Definitionen av produktmått kan lätt utsträckas till en ändlig produkt av positiva σ-ändliga mått. Vi skriver

$$m_n = m \times ... \times m\,,\ n\,\text{st faktorer}$$

och kallar detta mått för det n-dimensionella Lebesguemåttet. Observera att $m_1 = m = m_{\mathbf{R}}$. Om $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ är en given mängd kallas det mått μ som definieras av att $\mu(A) = m_n(A)$ för alla $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ sådana att $A \subseteq B$ för Lebesguemåttet i B. Man kallar m_n-kompletteringen av Borel-σ-algebran i $\mathbf{R}^n$ för Lebesgue-σ-algebran i $\mathbf{R}^n$. Råkar B vara en axelparallell parallellepiped i $\mathbf{R}^n$ och $f : B \to \mathbf{R}$ en reellvärd kontinuerlig funktion så är

$$\int_B f(x)dm_n(x) = \int_B f(x)dx = \underset{B}{\int \cdots \int} f(x_1, ..., x_n)dx_1...dx_n$$

där integralerna i mittersta och högra leden är vanliga Riemannintegraler.

Det kanoniska Gaussmåttet γ_n i $\mathbf{R}^n$ ges av

$$\gamma_n(A) = \int_A \frac{e^{-|x|^2/2}}{\sqrt{2\pi}^n} dm_n(x),\ A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$$

där

$$|\, x \,| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$$

är den vanliga normen i $\mathbf{R}^n$. I fortsättningen skriver vi också

$$d\gamma_n(x) = e^{-|x|^2/2}\frac{dm_n(x)}{\sqrt{2\pi}^n}$$

eller

$$d\gamma_n(x) = e^{-|x|^2/2}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}^n}.$$

En $\mathbf{R}^n$-värd stokastisk variabel X sägs vara en kanonisk Gaussvariabel i $\mathbf{R}^n$ om $\mu_X = \gamma_n$.

Vi skall nu ytligt beröra begreppet absolutkontinuitet för mått. Detta begrepp kommer senare att bli aktuellt i samband med riskneutrala mått i olika modeller. Låt $(R, \mathcal{A}, \mu)$ och $(R, \mathcal{A}, \nu)$ vara positiva måttrum. Vi säger att måttet ν är absolutkontinuerligt med avseende på måttet μ om

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0,\ \text{för } A \in \mathcal{A}.$$

Detta skrives $\nu << \mu$. Om $\nu << \mu$ och $\mu << \nu$ säges måtten vara ekvivalenta. Om $(R, \mathcal{A}, \mu)$ är ett positivt måttrum och $f \in L^1(\mu)$ är icke-negativ så gäller givetvis att $f\mu << \mu$. Om $(R, \mathcal{A}, \mu)$ är ett positivt σ-ändligt måttrum och $(R, \mathcal{A}, \nu)$ är ett ändligt positivt måttrum sådant att $\nu << \mu$ så är $\nu = f\mu$ för en lämplig icke-negativ funktion $f \in L^1(\mu)$. Detta resultat kallas Radon-Nikodyms sats.

Exempel 5. Betrakta återigen binomialmodellen med ett tidssteg. Det fysikaliska måttet ges av ekvationen

$$P = p_u \delta_u + p_d \delta_d$$

där

$$p_u = P[X = u]$$

och

$$p_d = P[X = d]$$

uppfyller $0 < p_u, p_d < 1$ och $p_u + p_d = 1$. Det är underförstått att $\Omega = \{u, d\}$ och $\mathcal{F} = 2^\Omega$. Dessutom förutsätts i det följande att $u > r > d$ så att motsvarande modell saknar arbitrage. Det riskneutrala måttet Q ges av

$$Q = q_u \delta_u + q_d \delta_d$$

där

$$q_u = \frac{e^r - e^d}{e^u - e^d}$$

och

$$q_d = \frac{e^u - e^r}{e^u - e^d}.$$

Om $P[A] = 0$ så gäller att $Q[A] = 0$ ty $p_u > 0$ och $p_d > 0$. Radon-Nykodyms sats garanterar därför att

$$Q = fP$$

dvs

$$q_u \delta_u + q_d \delta_d = f(u) p_u \delta_u + f(d) p_d \delta_d.$$

för en lämplig icke-negativ funktion $f \in L^1(P)$. Att det verkligen finns en sådan funktion f är i detta fall lätt att inse genom att definiera

$$f(u) = \frac{q_u}{p_u}$$

och

$$f(d) = \frac{q_d}{p_d}.$$

På liknande sätt inses att P är absolutkontinuerligt med avseende på Q varför måtten P och Q är ekvivalenta. []

Exempel 6. Om $X \in N(0,1)$ och $a \in \mathbf{R}$ så gäller att $Y = X + a \in N(a,1)$. Å andra sidan om

$$dQ = e^{-aX-\frac{a^2}{2}}dP$$

och $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ så gäller att

$$Q\left[Y \in A\right] = Q\left[X \in -a+A\right]$$

$$= \int_{X\in -a+A} dQ = \int_{X\in -a+A} e^{-aX-\frac{a^2}{2}}dP = \int_{-a+A} e^{-ax-\frac{a^2}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= \int_{-a+A} e^{-\frac{(x+a)^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \int_A e^{-\frac{y^2}{2}}\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}.$$

Valet $A = \mathbf{R}$ visar att Q är ett sannolikhetsmått. Vi har därför visat att den stokastiska variabeln $X + a$ har en Gaussisk fördelning med väntevärde 0 och varians 1 relativt sannolikhetsmåttet Q. []

Sats 4. (Cameron-Martins sats) *Antag* $h \in L^2[0,T]$ *och*

$$dQ = e^{-\int_0^T h(u)dW(u)-\frac{1}{2}\int_0^T h^2(u)du}dP.$$

Sätt

$$H(t) = \int_0^t h(u)du, 0 \le t \le T$$

och

$$W^h(t) = W(t) + H(t),\ 0 \le t \le T.$$

Då är W^h en normaliserad Wienerprocess relativt sannolikhetsmåttet Q.

Beviset för sats 4 bygger på följande

Lemma 1. *Antag (X,Y) är har bivariat normalfördelning sådan att $E[X] = E[Y] = 0$. Då är*

$$E\left[e^{X+iY}\right] = e^{\frac{1}{2}E\left[(X+iY)^2\right]}.$$

Bevis. Vi vet att

$$E\left[e^{X+zY}\right] = e^{\frac{1}{2}E\left[(X+zY)^2\right]}$$

för alla reella z. Vidare är både vänster och höger led hela analytiska funktioner av z (beroende på t ex Moreras sats). Eftersom funktionerna sammanfaller på reella axeln sammanfaller de överallt, vilket visar lemmat. []

Bevis av sats 4. Antag $0 \le t_0 \le t_1 \le ... \le t_n \le T$ och $\xi_0, ..., \xi_{n-1} \in \mathbf{R}$. Eftersom $W^h(0) = 0$ räcker det att visa att

$$E^Q\left[e^{i\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k(W^h(t_{k+1})-W^h(t_k))}\right] = e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k^2(t_{k+1}-t_k)}.$$

Men här är vänstra ledet lika med

$$E\left[e^{i\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k(W^h(t_{k+1})-W^h(t_k))}e^{-\int_0^T h(u)dW(u)-\frac{1}{2}\int_0^T h^2(u)du}\right]$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\int_0^T h^2(u)du}E\left[\prod_{k=0}^{n-1} e^{i\xi_k(W^h(t_{k+1})-W^h(t_k))-\int_{t_k}^{t_{k+1}} h(u)dW(u)}\right]$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\int_0^T h^2(u)du}e^{\sum_{k=0}^{n-1} i\xi_k\int_{t_k}^{t_{k+1}} h(u)du}E\left[\prod_{k=0}^{n-1} e^{i\xi_k(W(t_{k+1})-W(t_k))-\int_{t_k}^{t_{k+1}} h(u)dW(u)}\right]$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\int_0^T h^2(u)du}e^{\sum_{k=0}^{n-1} i\xi_k\int_{t_k}^{t_{k+1}} h(u)du}\prod_{k=0}^{n-1} E\left[e^{i\xi_k(W(t_{k+1})-W(t_k))-\int_{t_k}^{t_{k+1}} h(u)dW(u)}\right]$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\int_0^T h^2(u)du} e^{\sum_{k=0}^{n-1} i\xi_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} h(u)du} \prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{1}{2}E\left[(i\xi_k(W(t_{k+1})-W(t_k))-\int_{t_k}^{t_{k+1}} h(u))dW(u))^2\right]}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\int_0^T h^2(u)du} e^{\sum_{k=0}^{n-1} i\xi_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} h(u)du} \prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{1}{2}(-\xi_k^2(t_{k+1}-t_k)-2i\xi_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} h(u))du+\int_{t_k}^{t_{k+1}} h^2(u))du}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^2(t_{k+1}-t_k)}$$

vilket avslutar beviset för Cameron-Martins sats.

Övningar

1. Antag $A \subseteq R$. Visa att $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, R \setminus A, R\}$ är en σ-algebra av delmängder av R.

2. Antag $(R_k,\, \mathcal{A}_k)$, $k = 0, 1$, är mätbara rum och låt $f : R_0 \to R_1$. Visa att klassen
$$\left\{A \in \mathcal{A}_1; f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_0\right\}$$
är en σ-algebra.

3. Antag $(R,\, \mathcal{A})$ är ett mätbart rum och låt $A \subseteq R$. Visa att funktionen 1_A är mätbar om och endast om $A \in \mathcal{A}$.

4. Antag $(R,\, \mathcal{A}, \mu)$ är ett positivt måttrum och att $A, B \in \mathcal{A}$ uppfyller $A \subseteq B$. Visa att $\mu(A) \leq \mu(B)$.

5. Antag $(R,\, \mathcal{A}, \mu)$ är ett positivt måttrum och $A_k \in \mathcal{A}$, $k = 1, ..., n$ parvis disjunkta. Visa att
$$\mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k)\,.$$

6. Antag $(R,\, \mathcal{A}, \mu)$ är ett positivt måttrum och $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbf{N}$. Visa att
$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)\,.$$

7. En mängd A kallas uppräknelig om det finns en omvändbart entydig funktion definierad på $\mathbf{N}$ med värdemängden A. En mängd sägs vara högst uppräknelig om den är ändlig eller uppräknelig. Visa att följande mängder är högst uppräkneliga *a*) $\emptyset$ *b*) {alla jämna heltal} *c*) $\mathbf{N}^2$ *d*) $\mathbf{Q}$.

8. Låt U vara en öppen delmängd av $\mathbf{R}$. Visa att det finns $a_n \in \mathbf{Q}$, $n \in \mathbf{N}$ och $r_n \in \mathbf{Q}_+$, $n \in \mathbf{N}$, så att
$$\bigcup_{n \in \mathbf{N}}]a_n - r_n, a_n + r_n[= U.$$

9. Visa att $\sigma(\{]a, \infty[\,;\ a \in \mathbf{R}\}) = \mathcal{B}(\mathbf{R})$.

10. Antag $(R,\ \mathcal{A})$ är ett mätbart rum och låt $f : R \to \mathbf{R}$. Antag
$$\{x \in R;\ f(x) > a\} \in \mathcal{A}$$
för varje reellt tal a. Visa att f är $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$-mätbar.

11. Antag $(R,\ \mathcal{A})$ är ett mätbart rum och låt $f : R \to \mathbf{R}$. Antag
$$\{x \in R;\ f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}$$
för varje reellt tal a. Visa att f är $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$-mätbar.

12. Antag $(R,\ \mathcal{A}, \mu)$ är ett positivt måttrum $f : R \to [0, \infty]$ och
$$\int_R f(x)dx = 0.$$
Visa att $f = 0$ n.ö.

13. Antag $(R,\ \mathcal{A})$ är ett mätbart rum och låt f och g vara två reellvärda $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$-mätbara funktioner. Visa att $f + g$ är $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$-mätbar.

14. Antag $(R,\ \mathcal{A})$ är ett mätbart rum och låt f_n, $n \in \mathbf{N}$, vara en sekvens $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$-mätbara funktioner sådan att
$$\lim_{n \to \infty} f_n(x)$$
existerar och är lika med $f(x)$ för varje $x \in R$. Visa att f är $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$-mätbar.

15. Antag $f \in L^1[0,T]$ och definiera

$$F(t) = \int_0^t f(u)du, \ 0 \leq t \leq T.$$

Visa att F är kontinuerlig.

16. Visa att konvergens i $L^2(P)$ medför konvergens i $L^1(P)$.

17. Antag f, $f_n \in L^2(\mu)$, $n \in \mathbf{N}$, och att

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0.$$

Visa att det finns en delföljd av sekvensen $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ som konvergerar mot f n.ö. $[\mu]$.

18. **(Första hälften av Borel-Cantellis lemma)** Antag $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ är ett sannolikhetsrum och $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbf{N}$, händelser sådana att

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) < \infty.$$

Visa att endast ändligt många av händelserna A_n, $n \in \mathbf{N}$, inträffar med sannolikheten ett. Definieras

$$\{A_n \text{ i.o.}\} = \bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{k\geq n} A_k$$

så gäller alltså att

$$P[A_n \text{ i.o.}] = 0.$$

Här betyder i.o. "oändligt ofta" och kommer från engelskans "infinitely often".

19. Antag att $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ är kontinuerlig. Visa att f är $(\mathcal{B}(\mathbf{R}^m), \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))$-mätbar.

20. Visa att $\mathcal{B}(\mathbf{R}^{m+n}) = \mathcal{B}(\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbf{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$.

21. Antag $G \in N(0,1)$ och sätt för varje $f \in C_b(\mathbf{R})$ (= rummet av begränsade reellvärda funktioner definierade på $\mathbf{R}$) och $t > 0$

$$(A_t f)(x) = E\left[f(e^{-t}x + (1 - e^{-2t})^{\frac{1}{2}} G)\right], \ x \in \mathbf{R}$$

dvs

$$(A_t f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{-t}x + (1 - e^{-2t})^{\frac{1}{2}} y) e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}, \; x \in \mathbf{R}.$$

Visa att om $f \in C_b(\mathbf{R})$ så gäller att $A_t f \in C_b(\mathbf{R})$ och

$$A_{t_1}(A_{t_2} f) = A_{t_1+t_2} f.$$

22. Låt $(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n), \gamma_n)$. Visa att varje linjär avbildning $L : \Omega \to \mathbf{R}$ har en Gaussisk fördelning.

23. Antag $f_n \to f$ i $L^2(R, \mathcal{A}, \mu)$ då $n \to \infty$. Visa att

$$\lim_{n \to \infty} \int_R f_n^2(x) d\mu(x) = \int_R f^2(x) d\mu(x).$$

24. Antag $X_n \in N(0, \sigma_n^2)$, $n \in \mathbf{N}_+$, och $X_n \to X$ i $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ då $n \to \infty$. Visa att $X \in N(0, \sigma^2)$ för lämpligt $\sigma \geq 0$.