3. Konvexitet och funktionalanalys

I detta kapitel fördjupas den konvexitetsteori som behandlades i kursen Optioner och matematik. Resultaten används senare bl a i samband med värdepappersteorins huvudsatser. Resultaten är också värdefulla i samband med konstruktion av fullständiga ortogonalsystem i $L^2[0,1]$ och för att utreda existens av matematisk Brownsk rörelse, som studeras i ett speciellt appendix. I slutet av detta kapitel visas existensen av så kallade betingade väntevärden, ett begrepp som bl a leder fram till så kallade martingaler.

Alla vektorrum nedan är reella vektorrum. En delmängd A av ett vektorrum E sägs vara konvex, om sträckan som förbinder två godtyckliga punkter i mängden alltid ligger i mängden dvs om

$$x, y \in A \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in A,\ 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Om A och B är delmängder av E och $\alpha \in \mathbf{R}$ definieras

$$A + B = \{x + y;\ x \in A \text{ och } y \in B\}$$

och

$$\alpha A = \{\alpha x;\ x \in A\}.$$

Mängden $A+B$ kallas för summan eller, om det finns behov av att vara tydlig, Minkowskisumman av A och B. Observera att $A+B$ och αA är konvexa om A och B är konvexa. Om A är konvex så gäller också att $A + A = 2A$. Omvändningen är dock inte sann. T ex gäller att $\mathbf{Q}+\mathbf{Q}= 2\mathbf{Q}$ men $\mathbf{Q}$ är inte konvex.

En funktion $f : A \to \mathbf{R}$ kallas konvex om A är konvex och

$$x, y \in A \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),\ 0 \leq \lambda \leq 1.$$

En funktion f är konkav om $-f$ är konvex. En konvex funktion $f : E \to [0, \infty[$ sådan att $f(x) > 0$ om $x \neq 0$ sägs vara en norm på E om f är jämn dvs $f(-x) = f(x)$, $x \in E$, och positivt homogen av graden ett dvs $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, $x \in E$, $\alpha \geq 0$. Om f är en norm skriver man ofta $f(x) = \|x\|$. En norm karakteriseras alltså av följande egenskaper:

(i) $\|\alpha x\| = |\alpha|\, \|x\|$, α reellt
(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(*iii*) $\|x\| \geq 0$ med likhet om och endast om $x = 0$.

Absoluta beloppet av ett reellt tal är en norm på $\mathbf{R}$.

Ett vektorrum E och en norm $\|\cdot\|$ på E bestämmer ett normerat rum som ibland skrivs $(E, \|\cdot\|)$. Om $a \in E$ och $r > 0$ definieras

$$B(a;r) = \{x;\, x \in E \text{ och } \|x - a\| < r\}\,.$$

Mängden $B(a;r)$ kallas för en öppen boll med centrum a och radie r. En delmängd U av det normerade rummet E är öppen om det för varje $a \in U$ existerar $r > 0$ så att bollen $B(a;r)$ är en delmängd av U. En öppen boll är en öppen mängd. Unionen

$$A \cup B = \{x \in E;\, x \in A \text{ eller} x \in B\}$$

av två öppna mängder A och B är öppen. Unionen av ett godtyckligt antal öppna mängder är också öppen. En delmängd F av det normerade rummet E kallas sluten om dess komplement

$$E \setminus F = \{x \in E;\, x \notin F\}$$

är en öppen mängd. Snittet

$$A \cap B = \{x \in E;\, x \in A \text{ och } x \in B\}$$

av två slutna mängder A och B är slutet. Detsamma gäller för snittet av ett godtyckligt antal slutna mängder. Snittet av alla slutna mängder som omfattar en given mängd A kallas för slutna höljet av A och betecknas med $\bar{A}$. Unionen av alla öppna delmängder av en given mängd A kallas för det inre av A och betecknas med A^o. En delmängd A av E sägs vara tät i E om

$$A \cap B(a;r) \neq \emptyset, \text{ alla } a \in E \text{ och } \ r > 0.$$

Här betecknar $\emptyset$ den tomma mängden. Rationella talmängden är tät i reella talmängden då absolutbeloppet väljs som norm. Det normerade rummet (E , $\|\cdot\|$) sägs vara separabelt om det finns en sekvens $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ av element i E sådan att mängden $\{x_n;\, n \in \mathbf{N}\}$ är tät i E. En sekvens $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ i det normerade rummet E sägs vara konvergent om det finns ett $x \in E$ så att

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Det kan finnas högst en sådan vektor x och vi skriver

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Antag $(F, \|\cdot\|_F)$ är ett annat normerat rum A en delmängd av E. En funktion $f : A \to F$ sägs vara kontinuerlig om det för varje $a \in A$ och $\varepsilon > 0$ existerar $\delta > 0$ så att

$$\|x - a\| < \delta,\ x \in A \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon.$$

Det följer från definitionen att avbildningen $\|\cdot\|$ är en kontinuerlig funktion från $(E, \|\cdot\|)$ in i $(\mathbf{R}, |\cdot|)$. En kontinuerlig funktion $\gamma : [0,1] \to E$ kallas en kurva i E.

En delmängd K av det normerade rummet $(E, \|\cdot\|)$ är kompakt om varje sekvens $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ av element i K innehåller en delföljd $(x_{n_i})_{i\in\mathbf{N}}$ som konvergerar mot ett element i K. Som ett exempel på hur kompakthet kan tillämpas väljs två delmängder A och B av E, där A är sluten och B är kompakt. Vi skall visa att Minkowskisumman $A + B$ är sluten. Välj därför en sekvens $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ i $A + B$ som konvergerar mot en punkt $x \in E$. Vi skall visa att $x \in A + B$. Låt därför $x_n = a_n + b_n$, där $a_n \in A$ och $b_n \in B$ för varje $n \in \mathbf{N}$. Eftersom mängden B är kompakt finns en konvergent delföljd $(b_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ som konvergerar mot ett element $b \in B$. Observera att sekvensen $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ konvergerar mot x. Eftersom $a_{n_k} = x_{n_k} - b_{n_k}$ följer att sekvensen $(a_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ är konvergent. Vi kallar dess gränsvärde för a och drar slutsatsen att $a \in A$ eftersom A är sluten. Genom att låta $k \to \infty$ i relationen $x_{n_k} = a_{n_k} + b_{n_k}$ följer att $x = a + b \in A + B$.

En sekvens $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ i E sägs vara en Cauchyföljd om det för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett $p \in \mathbf{N}$ sådant att

$$m, n > p \Rightarrow \| x_m - x_n \| < \varepsilon.$$

En konvergent följd är en Cauchyföljd. Det normerade rummet $(E, \|\cdot\|)$ kallas ett Banachrum om varje Cauchyföljd i E är konvergent.

Rummet $C[0,T]$ av alla reellvärda kontinuerliga funktioner definierade i det kompakta intervallet $[0,T]$ med normen

$$\| x \|_\infty = \max_{0\le t\le T} | x(t) |$$

är ett separabelt Banachrum. Konvergens i detta rum kallas med klassisk terminologi för likformig konvergens.

Om $(R, \mathcal{A}, \mu)$ är ett postivt måttrum så bildar rummet $L^1(R, \mathcal{A}, \mu)$ med L^1-normen

$$\|x\|_1 = \int_R \mid x(t) \mid d\mu(t)$$

ett Banachrum. De enkla mätbara funktionerna bildar en tät delmängd av detta rum. På liknande sätt bildar rummet $L^2(R, \mathcal{A}, \mu)$ med L^2-normen

$$\|x\|_2 = \sqrt{\int_R x^2(t) d\mu(t)}$$

ett Banachrum. De enkla mätbara funktionerna bildar en tät delmängd av detta rum. Till sist bildar rummet $L^\infty(R, \mathcal{A}, \mu)$ med normen L^∞-normen $\| \cdot \|_\infty$ ett Banachrum.

Om E är ett vektorrum definieras

$$E \times E = \{(x, y);\ x, y \in E\}.$$

En avbildning $\varphi : E \times E \to \mathbf{R}$ kallas för en skalärprodukt i E om

(i) avbildningen $x \to \varphi(x, y)$ är linjär för alla $y \in E$
(ii) $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ för alla $x, y \in E$
(iii) $\varphi(x, x) \geq 0$ för alla $x \in E$ med likhet om och endast om $x = 0$.

Vi skriver i fortsättningen $\varphi(x, y) = (x, y)$ och

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Här uppfattas $\| x - y \|$ som avståndet mellan x och y. Med denna beteckning får vi kvadratregeln

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2$$

och parallellogramlagen

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Om x och y råkar vara ortogonala dvs om $(x, y) = 0$ så ger kvadratregeln likheten

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Denna relation brukar kallas Pythagoras sats. Vi påminner också om Cauchy-Schwarz olikhet

$$\mid (x, y) \mid \leq \|x\| \|y\|$$

som tillsammans med kvadratregeln ger triangelolikheten

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Funktionen $\| \cdot \|$ blir således en norm på E. Ett vektorrum E och en skalärprodukt på E kallas ett Hilbertrum om motsvarande normerade rum är ett Banachrum. Rummet $\mathbf{R}^n$ med skalärprodukten

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

är ett Hilbertrum. Bolzano-Weierstrass sats innebär att de slutna begränsade delmängderna av detta rum är kompakta.

Rummet $l^2(\mathbf{N})$ bestående av alla sekvenser $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ i $\mathbf{R}$ sådana att

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < \infty$$

är ett Hilbertrum med skalärprodukten

$$(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n.$$

Den slutna enhetsbollen $\{x;\ \| x \| \leq 1\}$ i detta rum är inte kompakt, ty om $e^{(n)} \in l^2(\mathbf{N})$, $n \in \mathbf{N}$, definieras av att

$$e^{(n)}(k) = \delta_{kn} \text{ (Kroneckers delta)}$$

gäller att $\| e^{(n)} \| = 1$ och

$$\|e^{(n)} - e^{(m)}\| = \sqrt{2},\ n \neq m$$

varför sekevensen $(e^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ ej kan innehålla någon konvergent delföljd.

Om $(R, \mathcal{A}, \mu)$ är ett postivt måttrum så bildar rummet $L^2(R, \mathcal{A}, \mu)$ med skalärprodukten

$$(x, y) = \int_R x(t) y(t) d\mu(t)$$

ett Hilbertrum. Antag $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ är ett sannolikhetsrum sådant att det finns en Wienerprocess $(W(t))_{0\leq t\leq 1}$ definierad på detta sannolikhetsrum.

Wienerprocessen definierar en kurva γ i $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definierad av ekvationen $\gamma(t) = W(t)$, $0 \leq t \leq 1$, ty ekvationen

$$\| W(s) - W(t) \|_2^2 = | s - t |$$

visar att γ är kontinuerlig. För godtyckliga $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq 1$ gäller att de nollskilda vektorerna $\gamma(t_2) - \gamma(t_1)$ och $\gamma(t_3) - \gamma(t_2)$ är ortogonala.

I resten av detta kapitel betecknar H ett Hilbertrum.

Sats 1. (Närmaste punktegenskapen) *Antag att C är en sluten, icke-tom och konvex delmängd av H och antag $x \in H$. Då finns en unik punkt $y \in C$ sådan att*

$$\inf_{z \in C} \|x - z\| = \|x - y\|.$$

Bevis. Antag

$$d = \inf_{z \in C} \|x - z\|$$

och låt $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vara en sekvens i C sådan att

$$\lim_{n \to \infty} \|x - z_n\| = d.$$

Parallellogramlagen ger nu likheten

$$2(\|x - z_m\|^2 + \|x - z_n\|^2) = 4\|x - \frac{z_m + z_n}{2}\|^2 + \|z_n - z_m\|^2$$

och eftersom C är konvex följer att

$$\frac{z_m + z_n}{2} \in C.$$

Härav drar vi slutsatsen att

$$2(\|x - z_m\|^2 + \|x - z_n\|^2) \geq 4d^2 + \|z_n - z_m\|^2.$$

Här är vänstra ledet godtyckligt nära $4d^2$ om m och n väljs tillräckligt stora varför sekvensen $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ är en Cauchyföljd, som måste vara konvergent eftersom H är ett Hilbertrum. Antag

$$\lim_{n \to \infty} z_n = y.$$

Eftersom C är sluten gäller att $y \in C$ och vi får att

$$\inf_{z \in A} \|x - z\| = \|x - y\|.$$

För att utreda entydighetsfrågan antages att vektorn $y' \in C$ är sådan att

$$\inf_{z \in C} \|x - z\| = \|x - y'\|.$$

Relationen

$$4d^2 = 2(\|x - y\|^2 + \|x - y'\|^2)$$

och parallellogramlagen ger nu

$$4d^2 = 4\|x - \frac{y + y'}{2}\|^2 + \|y' - y\|^2.$$

Eftersom

$$\frac{y + y'}{2} \in C$$

följer att

$$4d^2 \geq 4d^2 + \|y' - y\|^2$$

dvs $y' = y$. Detta avslutar beviset för sats 1. []

Vektorn y i sats 1 kallas för projektionen av x på C och betecknas med $P_C(x)$.

Sats 2. *Om C är en sluten, icke-tom och konvex delmängd av H och $z \in C$ gäller att*

$$(x - P_C(x), z - P_C(x)) \leq 0$$

för alla $x \in H$.

Bevis. Sätt $y = P_C(x)$. Om $0 < \lambda < 1$ gäller att

$$\|x - y\|^2 \leq \|x - ((1 - \lambda)y + \lambda z)\|^2$$

dvs

$$\|x - y\|^2 \leq \|(x - y) - \lambda(z - y)\|^2$$

dvs

$$0 \leq -2\lambda(x-y, z-y) + \lambda^2 \|z-y\|^2.$$

Genom att dividera denna olikhet med λ och sedan låta $\lambda \to 0$ erhålls

$$0 \leq -2(x-y, z-y).$$

Härav följer sats 2 omedelbart. []

Om B är en delmängd av H så definieras

$$B^{\perp} = \{x \in H;\ (x,y) = 0 \text{ för alla } y \in B\}.$$

Mängden $B^{\perp}$ är ett slutet delrum av H. Notera också att

$$B \cap B^{\perp} \subseteq \{0\}$$

eftersom

$$(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Vidare gäller att

$$B \subseteq (B^{\perp})^{\perp}.$$

Sats 3. (Topologiskt komplement) *Antag F är ett slutet delrum av H. Varje $x \in H$ har en entydig representation*

$$x = y + z$$

där $y \in F$ och $z \in F^{\perp}$. Vidare gäller att

$$y = P_F(x)$$

och

$$z = P_{F^{\perp}}(x).$$

Bevis. Antag $x \in H$ har två framställningar

$$x = y_k + z_k,\ k = 0, 1,$$

där $y_{0,}\ y_1 \in F$ och $z_0,\ z_1 \in F^{\perp}$. Härav erhålls att

$$y_0 - y_1 = z_1 - z_0$$

där vänstra ledet tillhör F och högra ledet tillhör $F^{\perp}$. Eftersom $F \cap F^{\perp} = \{0\}$ följer att $y_0 = y_1$ och $z_0 = z_1$.

För att utreda existensfrågan noterar vi att

$$(x - P_F(x), u - P_F(x)) \leq 0$$

för varje $u \in F$ enligt sats 2. Genom att ersätta u med $\pm u + P_F(x)$ erhålls att $x - P_F(x) \in F^{\perp}$. Alltså gäller att

$$x = P_F(x) + v$$

där $v \in F^{\perp}$. På samma sätt finns $w \in (F^{\perp})^{\perp}$ så att

$$x = w + P_{F^{\perp}}(x).$$

Eftersom

$$P_F(x) \in F \subseteq (F^{\perp})^{\perp}$$

så följer av entydigheten ovan tillämpad på $F^{\perp}$ och $(F^{\perp})^{\perp}$ att

$$v = P_{F^{\perp}}(x).$$

Detta avslutar beviset för sats 3. []

Följande så kallade separationssats för slutna konvexa mängder har flera tillämpningar inom denna kurs.

Sats 4. (Separationssatsen för punkt och sluten konvex mängd) *Antag C är en sluten, icke-tom och konvex delmängd av H och antag $x_0 \notin C$. Då finns en vektor $a \in H$ och $\alpha \in \mathbf{R}$ så att*

$$(a, x_0) < \alpha \leq (a, x)$$

för alla $x \in C$.

Bevis. Sätt
$$x_1 = P_C(x_0)$$
så att
$$(x_0 - x_1, x - x_1) \leq 0, \text{ för alla } x \in C.$$
Vi definierar nu $a = x_1 - x_0$ och får
$$(a, x_1) \leq (a, x), \text{ för alla } x \in C.$$
Vidare gäller att
$$(a, x_0) < (a, x_1)$$
eftersom $a \neq 0$. Vi kan därför definiera $\alpha = (a, x_1)$ och sats 4 följer direkt.
[]

Sats 5. (Separation av kompakt konvex mängd och slutet delrum) *Antag K är en kompakt konvex mängd i H och antag L är ett slutet delrum av H sådant att $K \cap L = \emptyset$. Då finns $a \in H$ så att*
$$a \cdot x > 0, \text{ om } x \in K$$
och
$$a \cdot y = 0, \text{ om } y \in L.$$

Bevis. Låt $C = K + L$. Observera att $0 \notin C$ och att C är en sluten konvex mängd. Vi använder sats 4 med $x_0 = 0$ och får ett $a \in H$ och ett $\alpha \in \mathbf{R}$ så att
$$0 = (a, 0) < \alpha \leq (a, u)$$
för alla $u \in C$. Välj nu $x \in K$ och $y \in L$ godtyckligt. Då gäller att
$$0 < \alpha \leq (a, x - y)$$
dvs
$$(a, x) \geq (a, y) + \alpha.$$
Genom att ersätta y med ty där $t \in \mathbf{R}$ så följer att
$$(a, x) \geq t(a, y) + \alpha$$

för alla $t \in \mathbf{R}$ och vi drar slutsatsen att $(a, y) = 0$. Härav följer också att $(a, x) \geq \alpha > 0$. Detta visar sats 5. []

Vi kommer efterhand att se många tillämpningar av resultaten i detta kapitel och nöjer oss här med att diskutera begreppet betingat väntevärde, ett nyckelbegrepp inom sannolikhetsteorin.

Antag $\mathcal{F}$ och $\mathcal{G}$ är σ-algebror av delmängder av Ω sådana att $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Rummen $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ och $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ är båda Hilbertrum och

$$L^2(\Omega, \mathcal{G}, P) \subseteq L^2(\Omega, \mathcal{F}, P).$$

Ett godtyckligt element $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ kan alltså enligt sats 3 skrivas

$$X = Y + Y^{\perp}$$

där $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ och $Y^{\perp} \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)^{\perp}$. Speciellt gäller att

$$E\left[XZ\right] = E\left[YZ\right], \text{ om } Z \in L^{\infty}(\Omega, \mathcal{G}, P)$$

eftersom $L^{\infty}(\Omega, \mathcal{G}, P) \subseteq L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$.

Antag nu att $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ och sätt $X_n = 1_{[|X| \leq n]} X$ för $n \in \mathbf{N}$. Till varje fixt $n \in \mathbf{N}$ finns enligt ovan ett $Y_n \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ sådant att

$$E\left[X_n Z\right] = E\left[Y_n Z\right], \text{ om } Z \in L^{\infty}(\Omega, \mathcal{G}, P).$$

För godtyckliga $m, n \in \mathbf{N}$ följer att

$$E\left[(X_m - X_n)Z\right] = E\left[(Y_m - Y_n)Z\right], \text{ om } Z \in L^{\infty}(\Omega, \mathcal{G}, P)$$

och väljs $Z = 1_{[Ym - Y_n \geq 0]} - 1_{[Y_m - Y_n < 0]}$ följer också att

$$E\left[\mid X_m - X_n \mid\right] \geq E\left[\mid Y_m - Y_n \mid\right].$$

Eftersom sekvensen $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ är konvergent i $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, beroende på Lebesgues majorantsats, och därmed en Cauchyföljd så är sekvensen $(Y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ en Cauchyföljd i $L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$, som därför måste konvergera mot ett visst element Y i $L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$. Kom nu ihåg att

$$E\left[X_n Z\right] = E\left[Y_n Z\right], \text{ om } Z \in L^{\infty}(\Omega, \mathcal{G}, P).$$

Genom att låta $n \to \infty$ följer att

$$E[XZ] = E[YZ], \text{ om } Z \in L^\infty(\Omega, \mathcal{G}, P).$$

Den stokastiska variabeln $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ kallas det betingade väntevärdet av X givet $\mathcal{G}$ och betecknas med $E[X \mid \mathcal{G}]$. Observera att

$$E[X; A] = E[Y; A], \text{ alla } A \in \mathcal{G}$$

och att det endast kan finnas en stokastisk variabel $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ som uppfyller denna relation.

Om $X_1, ..., X_n$ är reellvärda stokastiska variabler definierade på Ω betecknar $\sigma(X_1, ..., X_n)$ den minsta σ-algebra av delmängder av Ω som gör $X_1, ..., X_n$ mätbara. Vi skriver i fortsättningen

$$E[X \mid X_1, ..., X_n]$$

istället för

$$E[X \mid \sigma(X_1, ..., X_n)].$$

Om $X, Y : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ är reellvärda stokastiska variabler och $X \leq Y$ n.s. skriver vi helt enkelt $X \leq Y$. Om $A \in \mathcal{G}$ skrivs $E[1_A \mid \mathcal{G}] = P[A \mid \mathcal{G}]$.

Man kan visa följande egenskaper för betingat väntevärde:

(*i*) $E[1 \mid \mathcal{G}] = 1$
(*ii*) $E[\alpha X \mid \mathcal{G}] = \alpha E[X \mid \mathcal{G}]$, $\alpha \in \mathbf{R}$
(*iii*) $E[X + Y \mid \mathcal{G}] = E[X \mid \mathcal{G}] + E[X \mid \mathcal{G}]$.
(*iv*) $X \leq Y \Rightarrow E[X \mid \mathcal{G}] \leq E[Y \mid \mathcal{G}]$.
(*v*) $E[XY \mid \mathcal{G}] = XE[Y \mid \mathcal{G}]$, om X är $\mathcal{G}$-mätbar.

Om $\mathcal{G}_0$ och $\mathcal{G}_1$ är del-σ-algebror av $\mathcal{F}$ sådana att $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{G}_1$ så gäller den viktiga relationen

$$E[E[X \mid \mathcal{G}_1] \mid \mathcal{G}_0] = E[X \mid \mathcal{G}_0].$$

Ett bevis kan gå till så här. Sätt

$$Y_k = E[X \mid \mathcal{G}_k], \ k = 0, 1.$$

Det gäller att visa att

$$E[Y_1 \mid \mathcal{G}_0] = Y_0.$$

Eftersom Y_0 är $\mathcal{G}_0$-mätbar räcker det att visa att

$$E[Y_1; A] = E[Y_0; A]$$

för givet $A \in \mathcal{G}_0$. Här är högra ledet lika med $E[X; A]$. Även vänster led lika med $E[X; A]$ eftersom $A \in \mathcal{G}_1$ så beviset är klart.

Sats 6. (Jensens olikhet för betingade väntevärden) *Antag $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är konvex och låt $\mathcal{G}$ vara en del-σ-algebra av $\mathcal{F}$. Om X och $f(X) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ så gäller att*

$$f(E[X \mid \mathcal{G}]) \leq E[f(X) \mid \mathcal{G}].$$

Bevis. Antag $a \in \mathbf{R}$. Enligt kursen Optioner och matematik finns ett reellt tal c_a sådant att

$$f(x) \geq f(a) + c_a(x - a)$$

(resultatet följer ganska lätt från sats 4). Sätt $h_a(x) = f(a) + c_a(x - a) = c_a x + d_a$, där $d_a = f(a) - c_a a$. Egenskaperna (i) och (ii) visar att

$$h_a(E[X \mid \mathcal{G}]) = E[h_a(X) \mid \mathcal{G}].$$

Eftersom $f \geq h_a$ ger (iv) att

$$h_a(E[X \mid \mathcal{G}]) \leq E[f(X) \mid \mathcal{G}].$$

Sats 6 följer nu om vi observerar att

$$f(x) = \sup_{a \in \mathbf{R}} h_a(x).$$

[]

Övningar

1. Låt A vara en delmängd av ett normerat rum. Visa att $x \in \bar{A}$ om och endast om det existerar en följd $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ av element i A som konvergerar mot x.

2. Låt $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vara en följd i ett Banachrum sådan att
$$\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty.$$
Visa att serien
$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$
är konvergent.

3. Antag $(E, \|\cdot\|)$ och är ett normerat rum och $\alpha \in \mathbf{R}$. Visa att mängden
$$\{x \in E;\ f(x) > \alpha\}$$
är öppen om $f : E \to \mathbf{R}$ är kontinuerlig.

4. Visa att
$$F = (F^{\perp})^{\perp}$$
om F är ett slutet delrum av H.

5. Visa att maximum av två konvexa funktioner med samma definitionsmängd är konvex.

6. Antag $f : \mathbf{R} \to\ ]0, \infty[$. Visa att funktionen $\ln f$ är konvex om och endast om funktionen
$$e^{ax} f(x),\ x \in \mathbf{R}$$
är konvex för alla $a \in \mathbf{R}$.

7. Funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är konvex. Visa att funktionen
$$g(x, y) = y f(\frac{x}{y}),\ x \in \mathbf{R}, y > 0$$
är konvex.

8. Låt U vara en öppen konvex delmängd av $\mathbf{R}^n$. Visa att en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion $f : U \to \mathbf{R}$ är konvex om Hessematrisen
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x)\right)_{1\le j,k\le n}$$
är positivt semidefinit i varje punkt $x \in U$.

9. Visa att öppna bollar är konvexa.

10. Låt A vara en konvex delmängd av ett vektorrum. Visa att

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in A$$

för alla $x_1, ..., x_n \in A$ och alla $\lambda_1, ..., \lambda_n \in [0,1]$ som uppfyller

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1.$$

11. Funktionen $f : A \to \mathbf{R}$ är konvex. Visa att

$$f(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

för alla $x_1, ..., x_n \in A$ och alla $\lambda_1, ..., \lambda_n \in [0,1]$ som uppfyller

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1.$$

12. Låt $x_1, ...x_n > 0$ och antag $\lambda_1, ..., \lambda_n \in [0,1]$ uppfyller

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1.$$

Visa att

$$\prod_{k=1}^{n} x_k^{\lambda_k} \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

Notera specialfallet

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

13. Antag $t_1 < ... < t_n = T$ och låt $\lambda_1, ..., \lambda_n \in [0,1]$ uppfylla

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Betrakta två aktiederivat av europeisk typ som slutdagen T utbetalar

$$X = \max(0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S(t_i) - K)$$

resp

$$Y = \max(0, \prod_{i=1}^{n} S(t_i)^{\lambda_i} - K)$$

där $K > 0$. Låt $t < T$. Visa att det första derivatets värde vid tiden t ej understiger det andra derivatets värde vid tiden t (det förutsätts att dominansprincipen gäller).

14. Låt U vara en öppen konvex delmängd av $\mathbf{R}^n$ och $f : U \to \mathbf{R}$ en konvex funktion. Visa att f är uppåt begränsad på varje sluten begränsad delmängd K av U.

15. Låt U vara en öppen konvex delmängd av $\mathbf{R}^n$ och $f : U \to \mathbf{R}$ en konvex funktion. Visa att f är kontinuerlig.

16. Låt U vara en öppen konvex delmängd av $\mathbf{R}^n$ och $f : U \to \mathbf{R}$ en konvex funktion. Visa att det till varje $a \in U$ finns en vektor $c \in \mathbf{R}^n$ så att

$$f(x) \geq f(a) + c^*(x - a),\ x \in U.$$

17. Antag $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ är en sekvens i $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ som konvergerar mot X i $L^2(P)$. Låt $\mathcal{G}$ vara en del-σ-algebra av $\mathcal{F}$. Visa att sekvensen

$$(E[X_n \mid \mathcal{G}])_{n=1}^{\infty}$$

konvergerar mot $E[X \mid \mathcal{G}]$ i $L^2(\Omega)$. Visa också motsvarande resultat i $L^1(\Omega)$.