4. Stokastiska grundbegrepp

I detta avsnitt diskuteras flera grundläggande sannolikhetsteoretiska begrepp såsom stokastiskt oberoende, martingal och Markovprocess. Vi återknyter också till binomialmodellen med T tidssteg och ger en martingalkarakterisering av det så kallade riskneutrala måttet. För att senare förstå hur man härleder prisformler för lookback- och barriäroptioner beräknas också en del träffsannolikheter för Brownsk rörelse. Slutligen visas att en Brownsk trajektoria saknar derivata i varje tidspunkt med sannolikheten ett. Härav följer att ett aktiepris i Bachelier-Samuelsons modell saknar trend.

En familj reellvärda stokastiska variabler $(X(t))_{t \in T}$ kallas för en reellvärd stokastisk process. Vi skriver ofta $X(t) = X_t$. Indexmängden T kallas för tidsparametermängd och avbildningen

$$t \to X_t(\omega)$$

för en realisation, samplefunktion eller en trajektoria för processen. Om $T_0 \subseteq T$ betecknar $\sigma(X(t);\, t \in T_0)$ den minsta σ-algebra $\mathcal{G}$ av delmängder av Ω som gör alla avbildningarna $X(t)$, $t \in T_0$, $(\mathcal{G}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$-mätbara. För varje $n \in \mathbf{N}_+$ och $t_1, ..., t_n \in T$ definieras

$$\mu_{t_1,...,t_n} = \mu_{(X(t_1),...,X(t_n))}$$

där

$$(X(t_1), ..., X(t_n))(\omega) = (X_{t_1}(\omega), ..., X_{t_n}(\omega)),\ \omega \in \Omega.$$

Speciellt gäller alltså att

$$\mu_{t_1,...,t_n}(A_1 \times ... \times A_n) = P\left[X(t_1) \in A_1, ..., X(t_n) \in A_n\right]$$

för godtyckliga $A_k \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$, $k = 1, ..., n$. Måtten $\mu_{t_1,...,t_n}$, $t_1,...,t_n \in T$, $n \in \mathbf{N}_+$, kallas för processens marginalfördelningar. Två reellvärda stokastiska processer med samma marginalfördelningar sägs vara ekvivalenta i fördelning. De sägs också vara versioner av samma stokastiska process.

Om $(X(t))_{t \in T}$ är en reellvärd stokastisk process och varje $X(t) \in L^1(P)$ definieras väntevärdesfunktionen α av processen genom att

$$\alpha_t = E\left[X(t)\right],\ t \in T.$$

Funktionen α kallas ofta helt enkelt för väntevärdet av processen $(X(t))_{t\in T}$. Om dessutom varje $X(t) \in L^2(P)$ definieras kovariansfunktionen $C : T\times T \to \mathbf{R}$ genom att

$$C(s,t) = \operatorname{Cov}(X(s), X(t)),\ s,t \in T,$$

dvs

$$C(s,t) = E\left[(X(s) - \alpha_s)(X(t) - \alpha_t)\right],\ s,t \in T.$$

Funktionen C kallas ofta för kovariansen till processen $(X(t))_{t\in T}$.

En reellvärd stokastisk process sägs vara centrerad om den har väntevärdesfunktionen noll. En stokastisk process $(X_t)_{t\in\{1,...,n\}}$ skrivs ofta $(X_k)_{k=1}^n$ och kan identifieras med en $\mathbf{R}^n$-värd stokastisk variabel. Om varje $X_k \in L^1(P)$ kan processens väntevärde uppfattas som en vektor i $\mathbf{R}^n$.

Betrakta ett sannolikhetsrum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ och n st σ-algebror $\mathcal{G}_1, ..., \mathcal{G}_n$ innehållna i $\mathcal{F}$. Vi säger att σ-algebrorna $\mathcal{G}_1, ..., \mathcal{G}_n$ är stokastiskt oberoende om

$$P\left[\bigcap_{k=1}^n A_k\right] = \prod_{k=1}^n P\left[A_k\right]$$

för alla $A_k \in \mathcal{G}_k$, $k = 1, ..., n$.

Antag nu att $(R_k, \mathcal{A}_k), k = 1, ..., n,$ är mätbara rum och låt $X_k : \Omega \to R_k$, $k = 1, ..., n$, vara stokastiska variabler. Vi definierar som ovan

$$(X_1, ..., X_n)(\omega) = (X_1(\omega), ..., X_n(\omega)),\ \omega \in \Omega.$$

De stokastiska variablerna X_k, $k = 1, ..., n$, sägs vara stokastiskt oberoende om σ-algebrorna $\sigma(X_k)$, $k = 1, ..., n$, är stokastiskt oberoende, vilket är ekvivalent med att

$$\mu_{(X_1,...,X_n)} = \mu_{X_1} \times ... \times \mu_{X_n}.$$

Händelserna $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}$ sägs vara stokastiskt obereoende om indikatorfunktionerna $1_{A_1}, ..., 1_{A_n}$ är stokastiskt oberoende. Slutligen sägs en uppsättning σ-algebror (stokastiska variabler, händelser) vara stokastiskt oberoende om varje ändlig deluppsättning av dem är stokastiskt oberoende.

Existensen av ändliga produkter av sannolikhetsmått kan ges följande formulering.

Sats 1. *Låt $(R_k, \mathcal{A}_k, \mu_k)_{k=1}^n$ vara en följd sannolikhetsrum och sätt*

$$\begin{cases} \Omega = R_1 \times ... \times R_n \\ \mathcal{F} = \mathcal{A}_1 \times ... \times \mathcal{A}_n \\ P = \mu_1 \times ... \times \mu_n. \end{cases}.$$

Om

$$X_k(\omega) = \omega_k,\ \omega = (\omega_1, ..., \omega_n) \in \Omega,\ k = 1, , , , n$$

så är de stokastiska variabler $X_k : \Omega \to R_k$, $k = 1, ..., n$, *stokastiskt oberoende och*

$$\mu_{X_k}(A) = P[X_k \in A] = \mu_k(A),\ A \in \mathcal{A}_k,\ k = 1, ..., n.$$

En sekvens $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ av stokastiska variabler kallas en i.i.d. om de stokastiska variablerna X_k, $k \geq 1$, är stokastiskt oberoende och lika fördelade. Definitionen av i.i.d. kan också ges med en tidsparametermängd av exempelvis typen $\{1, ..., n\}$. Om X är en stokastisk variabel och $(X_k)_{k=1}^{n}$ är en i.i.d. sådan att X_1 och X har samma fördelning så sägs $X_1, ..., X_n$ vara stokastiskt oberoende observationer på X. Sats 1 garanterar att man alltid kan bilda ändligt många observationer på en stokastisk variabel. Det finns satser i måtteorin som garanterar att man kan bilda oändligt många stokastiskt oberoende observationer på en given stokastisk variabel. Detta utnyttjas bl a i ett appendix för att visa existens av matematisk Brownsk rörelse.

Begreppet stokastiskt oberoende är naturligtvis mycket intressant ur modellsynpunkt. Följande satser illustrerar att begreppet även har stora fördelar ur beräkningssynpunkt.

Sats 2. *Antag* $\mathcal{G}$ *är en* σ*-algebra och låt* $X \in L^1(P)$ *vara en reellvärd stokastisk variabel sådan att* $\mathcal{G}$ *och* $\sigma(X)$ *är stokastiskt oberoende. Då gäller att*

$$E[X \mid \mathcal{G}] = E[X].$$

Bevis. Om $A \in \mathcal{G}$ fås

$$E[X; A] = E[X 1_A]$$

och eftersom $\mathcal{G}$ och $\sigma(X)$ är stokastiskt oberoende följer att högra ledet är lika med

$$E[X]\, E[1_A] = E[E[X]\, 1_A] = E[E[X]; A].$$

En konstant funktion är naturligtvis $(\mathcal{G}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$-mätbar och satsen följer omedelbart. []

I fortsättningen lättar vi något på formalismen och säger helt enkelt att en reellvärd funktion är $\mathcal{G}$-mätbar om den är $(\mathcal{G}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$-mätbar. Vi påminner om att en funktion $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ som är $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$-mätbar kallas en Borelfunktion i $\mathbf{R}^n$. Om vi nedan talar om en mätbar funktion $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ så innebär detta att f är en Borelfunktion i $\mathbf{R}^n$.

Nedan kommer vi ofta att ha nytta av följande sats.

Sats 3. *Antag* $(R_k, \mathcal{A}_k)$, $k = 1, 2$, *är mätbara rum och låt* $X_k : \Omega \to R_k$, $k = 1, 2$ *vara stokastiskt oberoende stokastiska variabler. Antag vidare att* $f \in L^1(\mu_{(X_1,X_2)})$ *samt definiera*

$$g(x_1) = E\left[f(x_1, X_2)\right], \ x_1 \in R_1.$$

Då gäller att

$$E\left[f(X_1, X_2) \mid X_1\right] = g(X_1)$$

dvs

$$E\left[f(X_1, X_2) \mid X_1\right] = E\left[f(x_1, X_2)\right]_{|x_1 = X_1}.$$

Bevis. Låt $A \in \sigma(X_1)$. Det gäller att visa att

$$E\left[f(X_1, X_2)1_A\right] = E\left[g(X_1)1_A\right].$$

Men

$$A = X_1^{-1}(B)$$

för ett lämpligt $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ så

$$1_A = 1_B(X_1).$$

Det gäller alltså att visa att

$$E\left[f(X_1, X_2)1_B(X_1)\right] = E\left[g(X_1)1_B(X_1)\right]$$

eller

$$\int_{R_1 \times R_2} f(x_1, x_2)1_B(x_1)d(\mu_{X_1} \times \mu_{X_2})(x_1, x_2)$$
$$= \int_{R_1} g(x_1)1_B(x_1)d\mu_{X_1}(x_1).$$

Men

$$g(x_1) = E\left[f(x_1, X_2)\right] = \int_{R_2} f(x_1, x_2) d\mu_{X_2}(x_2)$$

så resultatet följer från Fubinis sats. []

Betrakta nu en sekvens reellvärda stokastiska variabler $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ och en sekvens $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ av σ-algebror innehållna i $\mathcal{F}$, där som vanligt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ betecknar det underliggande sannolikhetsrummet. Sekvensen $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ kallas en martingal om det för varje $n \geq 1$ gäller att

(i) $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$

(ii) $\sigma(M_n) \subseteq \mathcal{F}_n$

(iii) $M_n \in L^1(P)$ och $M_n = E\left[\, M_{n+k} \mid \mathcal{F}_n\right],\ k \geq 1.$

Villkoret (i) innebär att sekvensensen $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ är växande (i vid mening). En växande sekvens del-σ-algebror av $\mathcal{F}$ kallas ofta en filtration. Om $\mathcal{F}_n = \sigma(M_1, ..., M_n)$, $n \geq 1$, och $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ är en martingal sägs $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en martingal.

Varje $X \in L^1(P)$ definierar tillsammans med en växande sekvens $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ av del-σ-algebror av $\mathcal{F}$ en martingal $(M_n,\, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ genom formeln

$$M_n = E\left[\, X \mid \mathcal{F}_n\right],\ n \geq 1.$$

För att se detta observera att M_n är $\mathcal{F}_n$-mätbar och att Jensens olikhet för betingade väntevärden ger

$$\mid M_n \mid \leq E\left[\mid X \mid \mid \mathcal{F}_n\right]$$

och därmed

$$E\left[\mid M_n \mid\right] \leq E\left[\mid X \mid\right].$$

Vidare är

$$E\left[E\left[\, X \mid \mathcal{F}_{n+k}\right] \mid \mathcal{F}_n\right] = E\left[\, X \mid \mathcal{F}_n\right],\ k \geq 1$$

och vi har visat att $(M_n,\, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ är en martingal.

För exemplifiera martingalbegreppet betraktar vi en reellvärd stokastisk process $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ där varje $X_n \in L^1(P)$ och har förväntan noll. Vi antager också att de stokastiska variablerna $X_n,\ n \geq 1$, är stokastiskt oberoende och sätter

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,\ n \geq 1$$

och

$$\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, ..., Z_n) = \sigma(X_1, ..., X_n),\ n \geq 1.$$

Av förutsättningarna följer för varje $k \geq 1$ att

$$E\left[\, Z_{n+k} \mid \mathcal{F}_n \,\right] = Z_n + E\left[\, X_{n+1} + ... + X_{n+k} \mid \mathcal{F}_n\right].$$

Sats 2 medför emellertid att

$$E\left[\, X_{n+1} + ... + X_{n+k} \mid \mathcal{F}_n\right] = E\left[\, X_{n+1} + ... + X_{n+k}\right]$$

$$= E\left[\, X_{n+1}\right] + ... + E\left[\, X_{n+k}\right] = 0$$

vilket visar att sekvensen $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ är en martingal.

En reellvärd stokastisk process $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ sägs ha Markovegenskapen (eller vara en Markovkedja) om

$$E\left[f(U_{n+k}) \mid U_1, ..., U_n\right] = E\left[f(U_{n+k}) \mid U_n\right],\ n, k \geq 1,$$

för varje begränsad Borelfunktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. För att illustrera detta begrepp låter vi $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en reellvärd stokastisk process med stokastiskt oberoende komponenter dvs de stokastiska variablerna $X_n,\ n \geq 1$, antags vara stokastiskt oberoende. Sätt

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,\ n \geq 1.$$

Om $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är en begränsad Borelmätbar funktion och $k \geq 1$ så gäller att

$$E\left[f(Z_{n+k}) \mid Z_1, ..., Z_n\right] = E\left[f(Z_n + X_{n+1} + ... + X_{n+k}) \mid Z_1, ..., Z_n\right]$$

och eftersom de stokastiska variablerna $(Z_1, ..., Z_n)$ och $(X_{n+1,} ..., X_{n+k})$ är stokastiskt oberoende ger sats 3 att högra ledet är lika med

$$E\left[f(z_n + X_{n+1} + ... + X_{n+k})\right]_{|z_1 = Z_n, ... z_n = Z_n} =$$

$$\left(E\left[f(z + X_{n+1} + ... + X_{n+k})\right]\right)_{|z = Z_n} = E\left[f(Z_{n+k}) \mid Z_n\right].$$

Detta visar att processen $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ har Markovegenskapen. Om slumpvandringshypotesen ger en riktig bild av ett aktiepris så följer speciellt att historien inte ger mer information om morgondagens pris än vad som återfinns i dagens pris. All så kallad teknisk analys av det enskilda aktiepriset saknar i så fall prediktionsvärde.

Definitionerna av Markovegenskap och martingal kan också ges över ett godtyckligt delintervall av $\mathbf{N}$ (eventuellt med ändligt många element). Generaliseringen till kontinuerlig tid berörs nedan. Först sätter vi dock in de begrepp vi berört ovan i samband med binomialmodellen.

Betrakta därför en värdepappersmodell bestående av en aktie med priset $S(t)$ vid tiden t och en obligation med priset $B(t)$ vid tiden t, där $S(0)$ och $B(0)$ är positiva konstanter. Tidsvariabeln t antar värdena $0, 1, 2, ..., T$. Vidare gäller att

$$B(t+1) = B(t)e^r$$

där konstanten $r > 0$ och att

$$S(t+1) = S(t)e^{X(t+1)}$$

där $(X_t)_{t=1}^{T}$ är en i.i.d. sådan att varje $X(t) = X_t$ är en reellvärd 2-punktsfördelad stokastisk variabel. Det finns alltså $u, d \in \mathbf{R}$, som uppfyller $u > d$, så att sannolikheterna

$$p_u = P[X_t = u]$$

och

$$p_d = P[X_t = d]$$

är oberoende av t och uppfyller

$$p_u + p_d = 1,$$

$$p_u > 0$$

och

$$p_d > 0.$$

Vi antar också att händelsen

$$[X_t \notin \{u, d\}]$$

aldrig inträffar för godtyckligt $t = 1, ..., T$. Eftersom

$$S(t) = S(0)e^{X_1 + ... + X_t}, \ t = 0, ..., T$$

följer att $(\log S(t))_{t=0}^{T}$ är en slumpvandring och att $(S(t))_{t=0}^{T}$ är en Markovprocess.

Beroende på sats 1 kan binomialmodellen i T tidssteg ges följande enkla representation. Sätt först $\Omega_k = \{u, d\}$ och $\mathcal{A}_k = 2^{\Omega_k}$ och definiera ett sannolikhetsmått på $\mathcal{A}_k$ så att $P_k = p_u \delta_u + p_d \delta_d$ för $k = 1, ..., T$. Sätt därefter

$$\begin{cases} \Omega = \Omega_1 \times ... \times \Omega_T \\ \mathcal{F} = \mathcal{A}_1 \times ... \times \mathcal{A}_T \\ P = P_1 \times ... \times P_T \end{cases}$$

och

$$X_t(\omega) = \omega_t, \ \omega = (\omega_1, ..., \omega_T) \in \Omega.$$

Denna representation kallas för den första kanoniska representationen av binomialmodellen i T tidssteg och vi förutsätter denna representation i det följande. Måttet P kallas det fysikaliska måttet.

Sätt $X = (X_1, ..., X_T)$. Om $f : \Omega \to \mathbf{R}$ blir

$$E\left[f(X) \mid X_1, ..., X_{T-1}\right] = E\left[f(x_1, ..., x_{T-1}, X_n)\right]_{|x_1 = X_1, ... x_{T-1} = X_{T-1}}$$

$$= \sum_{i_T = u \ eller \ d} p_{i_T} f(X_1, ..., X_{T-1}, i_T)$$

beroende på sats 3. Upprepning ger

$$E\left[f(X) \mid X_1, ... X_{T-2}\right] = E\left[E\left[f(X) \mid X_1, ... X_{T-1}\right] X_1, ..., X_{T-2}\right]$$

$$= \sum_{i_{T-1}, i_T = u \ eller \ d} p_{i_{T-1}} p_{i_T} f(X_1, ..., X_{T-2}, i_{T-1}, i_T)$$

och till sist

$$E\left[f(X)\right] = \sum_{i_1, ..., i_T = u \ eller \ d} p_{i_1} .... p_{i_T} f(i_1, ..., i_T).$$

I fortsättningen antas att $u > r > d$ vilket innebär att modellen saknar arbitrage. Vi påminner om att $\Omega_k = \{u, d\}$ och $\mathcal{A}_k = 2^{\Omega_k}$ och definierar ett sannolikhetsmått på $\mathcal{A}_k$ så att $Q_k = q_u \delta_u + q_d \delta_d$ för $k = 1, ..., T$. Sätt därefter

$$Q = Q_1 \times ... \times Q_T.$$

Måttet Q kallas för det riskneutrala måttet. Notera att Q och P är ekvivalenta. Funktionerna $X_1, ..., X_T$ kan uppfattas som stokastiska variabler relativt sannolikhetsrummet $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ och de är stokastiskt oberoende och lika fördelade. Det följer därför att

$$E^Q[f(X)] = \sum_{i_1,...,i_T = u \; eller \; d} q_{i_1} \cdot ... \cdot q_{i_T} f(i_1, ..., i_T).$$

Vi inför nu följande filtration, nämligen

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$$

och

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, ..., X_t), \; t = 1, ..., T.$$

En sekvens $h = (h_S(t), h_B(t))_{t=0}^T$ kallas en strategi om $h(0) = h(1)$ och det för var varje $t = 1, ..., T$ gäller att $h(t)$ är $\mathcal{F}_{t-1}$-mätbar. Motsvarande värdeprocess $V_h = (V_h(t))_{t=0}^T$ definieras av ekvationen

$$V_h(t) = h_S(t)S(t) + h_B(t)B(t), \; t = 0, 1, .., T.$$

Med våra konventioner görs valet av $h_S(t)$ aktier och $h_B(t)$ obligationer vid tiden $t-1$ för $t = 1, .., T$. Portföljvärdet $V_h(t)$ är $\mathcal{F}_t$-mätbart för $t = 0, ..., T$.

Om en strategi $h = (h_S(t), h_B(t))_{t=0}^T$ uppfyller

$$V_h(t) = h_B(t+1)S(t) + h_B(t+1)B(t), \; t = 1, ..., T-1$$

sägs strategin vara vara självfinansierande. I detta fall gäller enligt kursen Optioner och matematik att

$$V_h(0) = e^{-rT} \sum_{i_1,...,i_T = u \text{ eller } d} q_{i_1} ... q_{i_T} V_h(T; i_1, ..., i_T)$$

dvs

$$V_h(0) = e^{-rT} E^Q[V_h(T)].$$

Det följer också att

$$V_h(t) = e^{-r\tau} E^Q[V_h(T) \mid \mathcal{F}_t]$$

där $\tau = T - t$ och $t = 0, ..., T$. Detta innebär att sekvensen

$$(e^{-rt} V_h(t), \mathcal{F}_t)_{t=0}^T$$

är en Q-martingal dvs en martingal relativt sannolikhetsrummet $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$. Speciellt gäller att

$$(e^{-rt} S(t), \mathcal{F}_t)_{t=0}^T$$

är en Q-martingal.

Antag ett derivat i aktien ger innehavaren beloppet Y vid tiden T där Y är $\mathcal{F}_T$-mätbar. Det gäller att $Y = f(X_1, ..., X_T)$ för en lämplig funktion $f : \Omega \to \mathbf{R}$. I kursen Optioner och matematik visades att det finns en självfinansierande strategi h sådan att $V_h(T) = Y$. Vi definierade sedan derivatets teoretiska pris $\Pi_Y(t)$ vid tiden t så att

$$\Pi_Y(t) = V_h(t)$$

och får därför prisformeln

$$\Pi_Y(t) = e^{-r\tau} E^Q \left[Y \mid \mathcal{F}_t \right], \ t = 0, ..., T.$$

Vi kan nu visa följande vackra sats.

Sats 4. *Betrakta binomialmodellen i T tidssteg och antag $u > r > d$. Det finns endast ett sannolikhetsmått μ på $\mathcal{F}$, ekvivalent med P, sådant att*

$$(e^{-rt} S(t), \mathcal{F}_t)_{t=0}^T$$

är en μ-martingal och detta mått är lika med med Q.

Bevis. Antag att Q_0 och Q_1 är sannolikhetsmått, ekvivalenta med P, sådana att $(e^{-rt} S(t), \mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ är en martingal relativt dessa mått. Om $h = (h_S(t), h_B(t))_{t=0}^T$ är en självfinansierande strategi så gäller för $t \leq T - 1$ och $i = 0, 1$ att

$$E^{Q_i} \left[e^{-r} V_h(t+1) \mid \mathcal{F}_t \right] = E^{Q_i} \left[e^{-r} (h_S(t+1) S(t+1) + h_B(t+1) B(t+1)) \mid \mathcal{F}_t \right]$$

$$= E^{Q_i} \left[h_S(t+1) e^{-r} S(t+1) + h_B(t+1) B(t)) \mid \mathcal{F}_t \right]$$

$$= h_S(t+1) E^{Q_i} \left[e^{-r} S(t+1) \mid \mathcal{F}_t \right] + h_B(t+1) B(t)$$

$$= h_S(t+1) S(t) + h_B(t+1) B(t) = V_h(t)$$

och upprepning ger

$$E^{Q_i} \left[e^{-(T-t)r} V_h(T) \mid \mathcal{F}_t \right] = V_h(t), \ t = 0, 1, ..., T.$$

Om $t = 0$ erhålls

$$E^{Q_i}\left[e^{-rT}V_h(T)\right] = V_h(0)$$

för $i = 0, 1$ och därför måste

$$E^{Q_0}\left[e^{-rT}V_h(T)\right] = E^{Q_1}\left[e^{-rT}V_h(T)\right].$$

Eftersom vår modell är komplett kan h väljas så att $e^{-rT}V^h(T)$ är en godtycklig $\mathcal{F}_T$-mätbar funktion varför $Q_1 = Q_2$. Slutligen visades före formuleringen av sats 4 att $(e^{-rt}S(t), \mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ är Q-martingal. Detta avslutar beviset för sats 4. []

Vi avslutar detta kapitel med att definiera och diskutera en del egenskaper för martingaler och Markovprocesser i kontinuerlig tid. Antag $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ är ett sannolikhetsrum. Låt vidare $X = (X(t))_{t\geq 0}$ vara en reellvärd stokastisk process och $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ en sekvens del-σ-algebror av $\mathcal{F}$ sådan att

(i) $\sigma(X(t)) \subseteq \mathcal{F}_t$, alla $t \geq 0$
(ii) $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, om $s \leq t$.

Sekvensen $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sägs vara en filtration om (ii) gäller. Man säger att $(X(t), \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ är en martingal om det för alla s, $t \geq 0$ gäller att

(a) $X(t)$ är $\mathcal{F}_t$-mätbar
(b) $X(t) \in L^1(P)$
(c) $E[X(t) \mid \mathcal{F}_s] = X(s)$ så snart $s \leq t$.

Om $\mathcal{F}_t = \sigma(X(u); u \leq t)$ och $(X(t), \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ är en martingal sägs $(X(t))_{t\geq 0}$ vara en martingal.

Martingaler med tidsparametermängden I, där I är ett delintervall av intervallet $[0, \infty[$, definieras analogt. Om

$$\mathcal{F}_t = \sigma(W(u);\ u \leq t),\ \ t \in I$$

och $(X(t), \mathcal{F}_t)_{t\in I}$ är en martingal sägs processen $(X(t))_{t\in I}$ vara en Wienermartingal i I .

Det finns gott om viktiga Wienermartingaler. Antag $0 \leq s \leq t$. Genom att utnyttja att $\mathcal{F}_s$ och $\sigma(W(t) - W(s))$ är stokastiskt oberoende följer att

$$\begin{aligned} E[W(t) \mid \mathcal{F}_s] &= E[W(s) \mid \mathcal{F}_s] + E[W(t) - W(s) \mid \mathcal{F}_s] \\ &= W(s) + E[W(t) - W(s)] = W(s). \end{aligned}$$

En normaliserad Wienerprocess är alltså en Wienermartingal. Antag $\sigma > 0$. Processen

$$M_\sigma(t) = e^{\sigma W(t) - \frac{\sigma^2 t}{2}},\ t \geq 0$$

är också en Wienermartingal ty

$$E\left[e^{\sigma W(t)} \mid \mathcal{F}_s\right] = E\left[e^{\sigma(W(t)-W(s))} e^{\sigma W(s)} \mid \mathcal{F}_s\right]$$

$$= e^{\sigma W(s)} E\left[e^{\sigma(W(t)-W(s))} \mid \mathcal{F}_s\right] = e^{\sigma W(s)} E\left[e^{\sigma(W(t)-W(s))}\right]$$

$$= e^{\sigma W(s)} e^{\frac{1}{2} E\left[(\sigma(W(t)-W(s)))^2\right]} = e^{\sigma W(s)} e^{\frac{\sigma^2}{2}(t-s)}$$

varför

$$E\left[M_\sigma(t) \mid \mathcal{F}_s\right] = M_\sigma(s).$$

Processen $(M_\sigma(t))_{t \geq 0}$ kallas för en Brownsk exponentialmartingal med parametern σ.

Vi kan lätt generera nya Wienermartingaler med hjälp av Paley-Wiener-Zygmunds stokastiska integraler. Om $f \in L^2[0,T]$ gäller att

$$E\left[\int_0^T f(u)dW(u) \mid \mathcal{F}_t\right] = \int_0^t f(u)dW(u).$$

Denna relation är självklar om f är indikatorfunktionen för ett intervall och följer därför genom superposition för speciellt enkla funktioner f. Allmänna fallet är nu en följd av definitionen av stokastisk integral. Processen

$$(\int_0^t f(u)dW(u))_{0 \leq t \leq T}$$

är alltså en Wienermartingal i intervallet $[0,T]$. Vi antar återigen att $f \in L^2[0,T]$ och definierar

$$M_f(t) = e^{\int_0^t f(u)dW(u) - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(u)du},\ 0 \leq t \leq T.$$

(Detta beteckningssätt är konsistent med tidigare beteckningssätt om f är en konstant positiv funktion.) Om $0 \leq s \leq t$ så gäller att

$$M_f(t) = M_f(s) e^{\int_s^t f(u)dW(u) - \frac{1}{2}\int_s^t f^2(u)du}$$

$$= M_f(s) e^{X - \frac{1}{2}E\left[X^2\right]}$$

där

$$X=\int_s^t f(u)dW(u)$$

är en centrerad Gaussisk stokastisk variabel sådan att $\sigma(X)$ och $\mathcal{F}_s$ är stokastiskt oberoende. Alltså är

$$E\left[M_f(t)\mid\mathcal{F}_s\right]=M_f(s)E\left[e^{X-\frac{1}{2}E\left[X^2\right]}\mid\mathcal{F}_s\right]$$

$$=M_f(s)E\left[e^{X-\frac{1}{2}E\left[X^2\right]}\right]=M_f(s).$$

Processen $(M_f(t))_{\,0\leq t\leq T}$ är således en Wienermartingal i intervallet $[0,T]$.

Vi kommer nu till det allra viktigaste martingalexemplet i denna kurs. Antag Black-Scholes värdepappersmodell är given. Aktiens prisprocess ges av ekvationen

$$S(t)=S(0)e^{\alpha t+\sigma W(t)},\ 0\leq t\leq T$$

där $W=(W(t))_{0\leq t\leq T}$ är en normaliserad Wienerprocess i tidsintervallet $[0,T]$ relativt ett sannolikhetsrum $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Obligationens prisprocess ges av ekvationen

$$B(t)=B(0)e^{rt},\ 0\leq t\leq T.$$

Här är $\alpha,\sigma,S(0),B(0)$ och r reella konstanter varav de fyra sista är positiva. Om vi inför $\mu=\alpha+\frac{\sigma^2}{2}$ så följer att

$$E\left[S(t)\right]=S(0)e^{\mu t}$$

varför μ kan uppfattas som aktieprisets medelavkastning per tidsenhet. Storheten

$$\lambda=\frac{\mu-r}{\sigma}$$

kallas marknadspriset för risk. Vi inför nu processen

$$W^{\lambda}(t)=W(t)+\lambda t,\ 0\leq t\leq T$$

och noterar att

$$\mathcal{F}_t=\sigma(S(u);u\leq t)=\sigma(W(u);u\leq t)$$

$$=\sigma(W^{\lambda}(u);u\leq t),\ 0\leq t\leq T.$$

Cameron-Martins sats garanterar att W^λ är en Wienerprocess relativt måttet Q, där

$$dQ = e^{-\mu W(T)-\frac{\lambda^2}{2}T}dP.$$

Definitionerna ger att

$$\frac{S(t)}{B(t)} = \frac{S(0)}{B(0)}e^{(\mu-r)t}e^{-\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma W(t)} = \frac{S(0)}{B(0)}e^{-\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma W^\lambda(t)},\ 0 \leq t \leq T$$

varför processen

$$(\frac{S(t)}{B(t)}, \mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$$

är en martingal relativt sannolikhetsrummet $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$. Vi säger därför att processen

$$(\frac{S(t)}{B(t)})_{0\leq t\leq T}$$

är en Q-martingal. Sannolikhetsmåttet Q kallas för martingalmåttet i Black-Scholes modell.

Antag nu att $g \in \mathcal{P}$. Om ett betingat kontrakt utbetalar beloppet $Y = g(S(T))$ slutdagen T och $\tau = T - t \geq 0$ så följer att

$$B(t)E^Q\left[\frac{Y}{B(T)} \mid \mathcal{F}_t\right] = e^{-r\tau}E^Q\left[g(S(T)) \mid \mathcal{F}_t\right]$$

$$= e^{-r\tau}E^Q\left[g(S(t)e^{\mu(T-t)+\sigma(W(T)-W(t))}) \mid \mathcal{F}_t\right]$$

$$= e^{-r\tau}E^Q\left[g(S(t)e^{r(T-t)+\sigma(W^\lambda(T)-W^\lambda(t))}) \mid \mathcal{F}_t\right]$$

$$= e^{-r\tau}E^Q\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(W^\lambda(T)-W^\lambda(t))})\right]_{|s=S(t)}$$

$$= e^{-r\tau}E^Q\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma W^\lambda(\tau)})\right]_{|s=S(t)}$$

$$= e^{-r\tau}E\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma W(\tau)})\right]_{|s=S(t)} = \Pi_Y(t)$$

där $\Pi_Y(t)$ som vanligt betecknar derivatets pris vid tiden t. Processen

$$(\frac{\Pi_Y(t)}{B(t)})_{0\leq t\leq T}$$

är således en Q-martingal.

Vi skall nu definiera begreppet Markovprocess i kontinuerlig tid. Låt $X = (X(t))_{t \geq 0}$ vara en reellvärd stokastisk process och $\mathcal{F}_t = \sigma(X(s);\ s \leq t)$ för varje t. Processen X sägs vara en Markovprocess om det för varje $s \leq t$ gäller att

$$E\left[f(X(t)) \mid \mathcal{F}_s\right] = E\left[f(X(t)) \mid X(s)\right]$$

för varje begränsad Borelfunktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Man kan visa att en Markovprocess för alla $s \leq t_1 < ... < t_n$ uppfyller relationen

$$E\left[f(X(t_1), ..., X(t_n)) \mid \mathcal{F}_s\right] = E\left[f(X(t_1), ..., X(t_n)) \mid X(s)\right]$$

för varje begränsad Borelfunktion $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Begreppet Markovprocess med tidsparametermängden I, där I är ett delintervall av intervallet $[0, \infty[$, definieras analogt.

Markovprocesser i kontinuerlig tid kan illustreras med lösningar till våra vanligaste stokastiska differentialekvationer. Som ett exempel antags att α och β är kontinuerliga deterministiska funktioner i intervallet $[0, T]$ och att $\sigma \in L^2\left[0, T\right]$. Vi vill lösa den stokastiska differentialekvationen

$$dX(t) = (\alpha(t) + \beta(t)X(t))dt + \sigma(t)dW(t),\ 0 \leq t \leq T$$

med begynnelsevärdet $x_0 \in \mathbf{R}$. Ekvationen skrivs på formen

$$dX(t) - \beta(t)X(t)dt = \alpha(t)dt + \sigma(t)dW(t)$$

och vi hittar lätt en integrerande faktor

$$e^{-B(t)}$$

där

$$B(t) = \int_0^t \beta(u)du.$$

Efter multiplikation med den integrerande faktorn kan ekvationen skrivas

$$d(e^{-B(t)}X(t)) = \alpha(t)e^{-B(t)}dt + \sigma(t)e^{-B(t)}dW(t)$$

och vi får att

$$X(t) = e^{B(t)}x_0 + \int_0^t \alpha(u)e^{B(t)-B(u)}du + \int_0^t \sigma(u)e^{B(t)-B(u)}dW(u).$$

Detta visar att σ-algebrorna $\mathcal{F}_t = \sigma(X(s);\ s \leq t)$ och $\sigma(W(u+a) - W(u));$ $u \geq t,\ a \geq 0)$ är stokastiskt oberoende.

Om $s \leq t$ får vi att

$$e^{-B(t)}X(t) = e^{-B(s)}X(s) + \int_s^t \alpha(u)e^{-B(u)}du + \int_s^t \sigma(u)e^{-B(u)}dW(u)$$

dvs

$$X(t) = K(t,s)X(s) + \int_s^t \alpha(u)K(t,u)du + \int_s^t \sigma(u)K(t,u)dW(u)$$

där

$$K(t,s) = e^{B(t)-B(s)}.$$

Om $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är en begränsad Borelfunktion blir det betingade väntevärdet $E\left[f(X(t)) \mid X(s)\right]$ är lika med

$$E\left[f(K(t,s)X(s) + \int_s^t \alpha(u)K(t,u)du + \int_s^t \sigma(u)K(t,u)dW(u)) \mid X(s)\right]$$

$$= E\left[f(y + \int_s^t \alpha(u)K(t,u)du + \int_s^t \sigma(u)K(t,u)dW(u))\right]_{y=K(t,s)X(s)}$$

enligt sats 3. Om $s_1 < s_2 < ... < s$ så visar samma sats att det betingade väntevärdet $E\left[f(X(t)) \mid X(s_1),..,X(s)\right]$ är lika med

$$E\left[f(K(t,s)X(s) + \int_s^t \alpha(u)K(t,u)du + \int_s^t \sigma(u)K(t,u)dW(u)) \mid X(s_1),..,X(s)\right]$$

$$= E\left[f(y + \int_s^t \alpha(u)K(t,u)du + \int_s^t \sigma(u)K(t,u)dW(u))\right]_{y=K(t,s)X(s)}$$

och det följer att

$$E\left[f(X(t)) \mid \mathcal{F}_s\right]$$

$$= E\left[f(y + \int_s^t \alpha(u)K(t,u)du + \int_s^t \sigma(u)K(t,u)dW(u))\right]_{y=K(t,s)X(s)}.$$

Alltså är

$$E\left[f(X(t)) \mid \mathcal{F}_s\right] = E\left[f(X(t)) \mid X(s)\right]$$

och vi har visat att processen $(X(t))_{t\geq 0}$ är en Markovprocess.

Följande resultat har bl a tillämpningar i samband flera exotiska optioner.

Sats 5. *Antag* $x > 0$ *och* $x \geq y$. *Då är*

$$P\left[\max_{0\leq t\leq 1} W(t) \geq x,\ W(1) \leq y\right] = P\left[W(1) \geq 2x - y\right]$$

$$= \Phi(y - 2x).$$

Sats 5 härleds ofta med hjälp av den så kallade starka Markovegenskapen, som går tillbaka till fieldmedaljören Hunts arbeten under andra hälften av 1950-talet. Sats 5 ingår i flera kurser i forskarutbildningen. Vårt bevis är mindre stringent.

"Bevis på Bacheliers vis". Antag N är ett stort positivt heltal och låt $(X_k)_{k=1}^N$ vara en i.i.d. sådan att

$$P\left[X_1 = 1\right] = P\left[X_1 = -1\right] = \frac{1}{2}.$$

Vi följer kursen Optioner och matematik och approximerar den normaliserade Wienerprocessen med en process W_N som har kontinuerliga trajektorier och som är affin i varje intervall $\left[\frac{n}{N}, \frac{n+1}{N}\right]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Vidare föreskrivs att

$$W_N(\frac{n}{N}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{n} X_k,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Fixera $j \leq i$, där $i \in \mathbf{N}_+$, $j \in \mathbf{Z}$ och $i \leq j$. Vi nöjer oss med att visa att

$$P\left[\max_{1\leq n\leq N} W_N(\frac{n}{N}) \geq \frac{i}{\sqrt{N}},\ W_N(1) \leq \frac{j}{\sqrt{N}}\right]$$

$$= P\left[\max_{1\leq n\leq N} W_N(\frac{n}{N}) \geq \frac{i}{\sqrt{N}},\ W_N(1) \geq \frac{2i-j}{\sqrt{N}}\right]$$

dvs

$$P\left[\max_{1\leq n\leq N} W_N(\frac{n}{N}) \geq \frac{i}{\sqrt{N}},\ W_N(1) \leq \frac{j}{\sqrt{N}}\right]$$

$$= P\left[W_N(1) \geq \frac{2i-j}{\sqrt{N}}\right].$$

Nu är

$$P\left[\max_{1\le n\le N} W_N(\frac{n}{N}) \ge \frac{i}{\sqrt{N}},\ W_N(1) \le \frac{j}{\sqrt{N}}\right]$$

$$= P\left[\max_{1\le n\le N} \sum_{k=1}^{n} X_k \ge i,\ \sum_{k=1}^{n} X_k \le j\right]$$

$$= \sum_{m=1}^{N} P\left[X_1 < i, ..., \sum_{\nu=1}^{m-1} X_\nu < i, \sum_{\nu=1}^{m} X_\nu = i, i + \sum_{\nu=m+1}^{N} X_\nu \le j\right]$$

$$= \sum_{m=1}^{N} P\left[X_1 < i, ..., \sum_{\nu=1}^{m-1} X_\nu < i, \sum_{\nu=1}^{m} X_\nu = i, i - \sum_{\nu=m+1}^{N} X_\nu \le j\right]$$

$$= \sum_{m=1}^{N} P\left[X_1 < i, ..., \sum_{\nu=1}^{m-1} X_\nu < i, \sum_{\nu=1}^{m} X_\nu = i, i + \sum_{\nu=m+1}^{N} X_\nu \ge 2i - j\right]$$

$$= P\left[\max_{1\le n\le N} \sum_{k=1}^{n} X_k \ge i,\ \sum_{k=1}^{N} X_k \ge 2i - j\right]$$

$$= P\left[\max_{1\le n\le N} W_N(\frac{n}{N}) \ge \frac{i}{\sqrt{N}},\ W_N(1) \ge \frac{2i-j}{\sqrt{N}}\right]$$

vilket avslutar beviset för satsen. []

Antag återigen att $x > 0$ och $x \ge y$ och låt $t > 0$. Skalningsegenskapen för Wienerprocessen ger

$$P\left[\max_{0\le u\le t} W(u) \ge x,\ W(t) \le y\right] = P\left[\max_{0\le u\le 1} W(tu) \ge x,\ W(1t) \le y\right]$$

$$= P\left[\max_{0\le u\le 1} W(u) \ge \frac{x}{\sqrt{t}},\ W(1) \le \frac{y}{\sqrt{t}}\right]$$

$$= 1 - \Phi(\frac{2x-y}{\sqrt{t}}).$$

Härav erhålls också att

$$P\left[\max_{0\le u\le t} W(u) < x,\ W(t) \le y\right] = P\left[\ W(t) \le y\right]$$

$$-P\left[\max_{0\le u\le t} W(u)\ge x,\ W(t)\le y\right]=\Phi(\frac{y}{\sqrt{t}})-\Phi(\frac{y-2x}{\sqrt{t}}).$$

Notera att Lebesgues majorantsats nu ger att

$$P\left[\max_{0\le u\le t} W(u)\le x,\ W(t)\le y\right]=\Phi(\frac{y}{\sqrt{t}})-\Phi(\frac{y-2x}{\sqrt{t}})$$

eftersom funktionen Φ är kontinuerlig. Låt

$$\Phi'=\phi.$$

Den 2-dimensionella stokastiska variabeln $(\max_{0\le u\le t} W(u), W(t))$ har därför frekvensfunktionen $f(x,y)$ given av att

$$f(x,y)=\frac{2(2x-y)}{t^{3/2}}\phi(\frac{y-2x}{\sqrt{t}}),\ x>0,\ y\le x$$

och $f(x,y)=0$ för övriga x och y.

Vi kan nu visa följande sats.

Sats 6. *Låt $\alpha\in\mathbf{R}$ och $\sigma>0$. Sätt*

$$X(t)=\alpha t+\sigma W(t),\ 0\le t\le T$$

och antag att $x>0$, $x\ge y$ och $t>0$. Då är

$$P\left[\max_{0\le u\le t} X(u)\le x,\ X(t)\le y\right]=\Phi(\frac{y-\alpha t}{\sigma\sqrt{t}})-e^{\frac{2\alpha x}{\sigma^2}}\Phi(\frac{y-2x-\alpha t}{\sigma\sqrt{t}}).$$

Den 2-dimensionella stokastiska variabeln $(\max_{0\le u\le t} X(u), X(t))$ har frekvensfunktionen

$$f_{\alpha,\sigma}(x,y)=\frac{2(2x-y)}{\sigma^3 t^{3/2}}\phi(\frac{y-2x}{\sigma\sqrt{t}})e^{\frac{\alpha y-\frac{1}{2}\alpha^2 t}{\sigma^2}},\ x\ge 0,\ y\le x$$

och $f_{\alpha,\sigma}(x,y)=0$ för övriga x och y.

Bevis. Antag först att $\sigma=1$ och sätt

$$dQ=e^{-\alpha W(t)-\frac{\alpha^2 t}{2}}dP.$$

Cameron-Martins sats medför att processen $(X(u))_{0\leq u\leq t}$ är en normaliserad Wienerprocess i tidsintervallet $[0,t]$ relativt måttet Q. Härav följer att

$$P\left[\max_{0\leq u\leq t} X(u)\leq x,\ X(t)\leq y\right]$$

$$= Q\left[e^{\alpha W(t)+\frac{\alpha^2 t}{2}};\max_{0\leq u\leq t} X(u)\leq x,\ X(t)\leq y\right]$$

$$= Q\left[e^{\alpha X(t)-\frac{\alpha^2 t}{2}};\max_{0\leq u\leq t} X(u)\leq x,\ X(t)\leq y\right]$$

$$= \int_0^x\int_{-\infty}^y e^{\alpha\eta-\frac{\alpha^2 t}{2}} f_{0,1}(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

$$= \int_{-\infty}^y e^{\alpha\eta-\frac{\alpha^2 t}{2}}\frac{1}{\sqrt{t}}(\phi(\frac{\eta}{\sqrt{t}})-\phi(\frac{\eta-2x}{\sqrt{t}}))d\eta$$

$$= \Phi(\frac{y-\alpha t}{\sqrt{t}})-e^{2\alpha x}\Phi(\frac{y-2x-\alpha t}{\sqrt{t}}).$$

För godtyckligt $\sigma>0$ följer nu att

$$P\left[\max_{0\leq u\leq t} X(u)\leq x,\ X(t)\leq y\right]$$

$$= P\left[\max_{0\leq u\leq t} X(u)/\sigma\leq x/\sigma,\ X(t)/\sigma\leq y/\sigma\right]$$

$$= \Phi(\frac{y/\sigma-(\alpha/\sigma)t}{\sqrt{t}})-e^{2(\alpha/\sigma)(x/\sigma)}\Phi(\frac{y/\sigma-2x/\sigma-(\alpha/\sigma)t}{\sqrt{t}})$$

$$= \Phi(\frac{y-\alpha t}{\sigma\sqrt{t}})-e^{\frac{2\alpha x}{\sigma^2}}\Phi(\frac{y-2x-\alpha t}{\sigma\sqrt{t}}).$$

Det analytiska uttrycket för $f_{\alpha,\sigma}(x,y)$ erhålls genom derivering, vilket avslutar beviset för sats 6.

Följande exempel har stort intresse inom spelteori.

Exempel 1. Antag $x>0$ och sätt

$$\tau=\inf\{t>0;\ \alpha t+\sigma W(t)\geq x\}$$

med konventionen att infimum över tomma mängden är ∞. Då är för fixt $t > 0$,

$$P[\tau > t] = P\left[\max_{0\le u\le t}(\alpha u + \sigma W(u)) < x\right]$$
$$= \Phi(\frac{x-\alpha t}{\sigma\sqrt{t}}) - e^{\frac{2\alpha x}{\sigma^2}}\Phi(\frac{-x-\alpha t}{\sigma\sqrt{t}}).$$

Om $\alpha < 0$ så följer att

$$P[\tau = \infty] = 1 - e^{\frac{2\alpha x}{\sigma^2}} > 0.$$

Sannolikheten är alltså positiv att processen $(\alpha t + \sigma W(t))_{t\ge 0}$ aldrig träffar punkten x.

Om $\alpha \ge 0$ gäller dock att

$$P[\tau = \infty] = 0$$

dvs processen $(\alpha t + \sigma W(t))_{t\ge 0}$ träffar punkten x vid någon tidpunkt med sannolikheten ett. I fallet utan drift dvs $\alpha = 0$ så har T ett oändligt väntevärde ty

$$P[\tau > t] = 2\Phi(\frac{x}{\sigma\sqrt{t}}) - 1$$

ger att

$$E[\tau] = \int_0^\infty \frac{x}{\sigma t^{1/2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dt = \infty.$$

Om $\alpha > 0$ visar man lätt att $E[\tau] < \infty$. []

Vi avslutar detta kapitel med att visa följande sats.

Sats 5. *Händelsen*

$$\{\omega \in \Omega;\ W_t(\omega) \text{ saknar derivata i varje tidpunkt } t \ge 0\}$$

har sannolikheten ett.

Bevis. Det räcker att visa att händelsen

$$A_T = \{\omega \in \Omega;\ W_t(\omega) \text{ är deriverbar i någon tidpunkt } t \in [0, T]\}$$

har sannolikheten noll för varje $T > 0$. Genom skalning inses sedan att det räcker att visa att händelsen A_1 har sannolikheten noll.

Låt nu $B(c, \varepsilon)$ vara mängden av alla $\omega \in \Omega$ sådana att det existerar $s \in [0, 1]$ så att

$$\mid W(t) - W(s) \mid \leq c \mid t - s \mid \text{ om } t \in [s - \varepsilon, s + \varepsilon] \cap [0, 1]$$

där $c, \varepsilon > 0$. Observera att

$$A_1 \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B(j, \frac{1}{k}).$$

Det räcker därför att visa att $P[B(c, \varepsilon)] = 0$ för alla $c, \varepsilon > 0$.

Vi fixerar nu $c, \varepsilon > 0$ och låter m vara ett strikt positivt heltal som preciseras längre fram i beviset. Sätt

$$X_{n,k} = \max_{k \leq j < k+m} \mid W(\frac{j+1}{n}) - W(\frac{j}{n}) \mid$$

för varje heltal $n > m$ och heltal $k \in \{0, ..., n - m\}$.

Låt $n > m$ från och med nu vara så stort att

$$\frac{m}{n} \leq \varepsilon.$$

Vi påstår att

$$B(c, \varepsilon) \subseteq \left[\min_{0 \leq k \leq n-m} X_{n,k} \leq 2c\frac{m}{n} \right].$$

Om $\omega \in B(c, \varepsilon)$ existerar $s \in [0, 1]$ så att

$$\mid W(t) - W(s) \mid \leq c \mid t - s \mid \text{ om } t \in [s - \varepsilon, s + \varepsilon] \cap [0, 1].$$

Välj ett $k \in \{0, ..., n - m\}$ så att

$$s \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k}{n} + \frac{m}{n} \right].$$

Om $k \leq j < k+m$ följer att

$$| W(\frac{j+1}{n}) - W(\frac{j}{n}) | \leq | W(\frac{j+1}{n}) - W(s) | + | W(s) - W(\frac{j}{n}) |$$

$$\leq 2c\frac{m}{n}$$

och därmed är $X_{n,k} \leq 2c\frac{m}{n}$. Vi har alltså visat att

$$B(c,\varepsilon) \subseteq \left[\min_{0\leq k\leq n-m} X_{n,k} \leq 2c\frac{m}{n}\right]$$

och det räcker därför att visa att

$$P\left[\min_{0\leq k\leq n-m} X_{n,k} \leq 2c\frac{m}{n}\right] = 0.$$

Men

$$P\left[\min_{0\leq k\leq n-m} X_{n,k} \leq 2c\frac{m}{n}\right] \leq \sum_{k=0}^{n-m} P\left[X_{n,k} \leq 2c\frac{m}{n}\right]$$

$$= (n-m)P\left[X_{n,0} \leq 2c\frac{m}{n}\right] \leq nP\left[X_{n,0} \leq 2c\frac{m}{n}\right]$$

$$= n(P\left[| W(\frac{1}{n}) | \leq 2c\frac{m}{n}\right])^m = n(P(| W(1) | \leq 2c\frac{m}{\sqrt{n}})^m$$

$$\leq n(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}4c\frac{m}{\sqrt{n}})^m.$$

Om vi från början valt $m = 3$ så följer att högra ledet går mot noll då $n \to \infty$, vilket visar satsen. []

En annan märklig egenskap för Brownsk rörelse framkommer genom Khintchines itererade logaritmlag som innebär att

$$P\left[\limsup_{t\to 0+} \frac{W(t)}{\sqrt{2t\ln(\ln 1/t)}} = 1\right] = 1$$

och

$$P\left[\liminf_{t\to 0+} \frac{W(t)}{\sqrt{2t\ln(\ln 1/t)}} = -1\right] = 1$$

(se t ex $[McK]$). Speciellt följer härav att händelsen

$$\left[\begin{array}{c} W(t) > 0 \text{ för oändligt många } t \in [0,\delta] \text{ och} \\ W(t) < 0 \text{ för oändligt många } t \in [0,\delta] \end{array}\right]$$

har sannolikheten ett för varje $\delta > 0$. Om $(S(t))_{t\geq 0}$ betecknar ett aktiepris i Bachelier-Samuelsons modell så följer t o m att händelsen

$$\left[\begin{array}{c} S(t) > S(0) \text{ för oändligt många } t \in [0,\delta] \text{ och} \\ S(t) < S(0) \text{ för oändligt många } t \in [0,\delta] \end{array}\right]$$

har sannolikheten ett för varje $\delta > 0$. Om den reellvärda funktionen $a(t)$, $0 \leq t \leq T$, är kontinuerlig och uppfyller $a(0) = S(0)$ så kan man också visa att

$$P\left[\mid S(t) - a(t) \mid < \varepsilon, \text{ alla } 0 \leq t \leq T\right] > 0$$

för alla $\varepsilon > 0$. Så kallade prisbubblor för enskilda aktier strider alltså inte direkt mot Bachelier-Samuelsons modell såvida de inte upprepas alltför ofta.

Övningar

1. Låt $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en i.i.d. där varje $X_n \in N(0,1)$. Sätt $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$ och
$$M_n = e^{X_1 + ... + X_n - \frac{n}{2}}, \; n = 1, 2, ... \;\; .$$
Visa att $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ är en martingal.

2. Betrakta en sekvens reellvärda stokastiska variabler $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ och en sekvens $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ av σ-algebror. Visa att sekvensen $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$är en martingal om det för varje $n \geq 1$ gäller att

   (i) $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$

   (ii) $\sigma(M_n) \subseteq \mathcal{F}_n$

   (iii) $M_n \in L^1(P)$ och $M_n = E\left[\, M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]$.

3. Visa att en reellvärd stokastisk process $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ har Markovegenskapen om
$$E\left[f(U_{n+1}) \mid U_1, ..., U_n\right] = E\left[f(U_{n+1}) \mid U_n\right], \; n \geq 1,$$
för varje begränsad Borelfunktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

4. Betrakta binomialmodellen med T tidssteg och låt $h = (h_S, h_B)$ vara en självfinansierande strategi. a) Visa att

$$e^{-rt}V_h(t) = V_h(0) + \sum_{k=1}^{t} h_S(k)(e^{-rk}S(k) - e^{-r(k-1)}S(k-1)).$$

(Ledning: Om

$$A(t) = (e^{-rt}S(t), B(0)) = (\tilde{S}(t), B(0))$$

så följer att

$$V_h(0) + \sum_{k=1}^{t} h_S(k)(\tilde{S}(k) - \tilde{S}(k-1))$$

$$= V_h(0) + \sum_{k=1}^{t} h(k) \cdot (A(k) - A(k-1)).$$

Gruppera därefter om termerna.) b) Ge ett alternativt bevis för sats 4 med hjälp av del a).

5. Visa att processen $W^3(t) - 3tW(t)$, $t \geq 0$, är en Wienermartingal.

6. Antag $u(t,x) = x^4 + 7x^3 - 6tx^2 - 21tx + 3t^2$, $t \geq 0$, $x \in \mathbf{R}$. Visa att processen $(u(t, W(t)))_{t \geq 0}$ är en Wienermartingal.

7. Visa att processen

$$(e^{-\frac{t}{2}} \cosh W(t))_{t \geq 0}$$

är en Wienermartingal.

8. Antag att $U = (U(t))_{t \in \mathbf{R}}$ är en normaliserad Ornstein-Uhlenbeckprocess dvs U är en centrerad Gaussprocess med kovariansen

$$E\left[U(s)U(t)\right] = e^{-\frac{|s-t|}{2}}.$$

Visa att U är en Markovprocess.

9. Visa att processen

$$(e^{-\frac{t}{2}} W(e^t))_{t \in \mathbf{R}}$$

är en normaliserad Ornstein-Uhlenbeckprocess.

10. (Bachelier-Samuelsons modell) Antag $S(0) = 100$, $\alpha = 0.1$, $r = 0.05$ och $\sigma = 0.3$. Beräkna sannolikheten att aktiepriset någon gång överstiger 120 i tidsintervallet $[0, 1]$.

11. Antag $X(t) = \alpha t + \sigma W(t)$, $0 \leq t \leq T$, där $\alpha \in \mathbf{R}$ och $\sigma > 0$. Beräkna

$$E\left[e^M\right]$$

då

$$M = \max_{0 \leq t \leq T} X(t).$$

12. Antag $\mathcal{F}_t = \sigma(W(u); u \leq t)$, $t \leq t_1 \leq ... \leq t_n$, och låt $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ vara en begränsad Borelfunktion. Visa att

$$E\left[f(W(t_1), ..., W(t_n)) \mid \mathcal{F}_t\right]$$

$$= E\left[f(x + W(t_1 - t), ..., x + W(t_n - t)) \mid \mathcal{F}_t\right]_{|x=W(t)}$$

13. Antag $0 < a < b$. Beräkna sannolikheten att $W(t) = 0$ för något $t \in [a, b]$.