5. Värdepappersteorins två huvudsatser

I det här kapitlet visas versioner av värdepappersteorins två huvudsatser där tiden och det underliggande utfallsrummet är ändliga. Värdepapperens prisdynamik tillåts vara mycket allmän och resultaten är av grundläggande betydelse för finansiell matematik. Motsvarande resultat i kontinuerlig tid kräver stora kunskaper i stokastisk analys och funktionalanalys och faller utom ramen för denna kurs.

Som utgångspunkt har vi alltså ett sannolikhetsrum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, där Ω är ändlig. Tiden förutsätts också vara ändlig och består av punkterna $0, 1, ..., T$, där T är ett positivt heltal. Dessutom är det givet en filtration

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq ... \subseteq \mathcal{F}_T = \mathcal{F}$$

och $n+1$ värdepapper med prisprocesserna

$$S_1 = (S_1(t))_{t=0}^T, ..., S_{n+1} = (S_{n+1}(t))_{t=0}^T.$$

Motsvarande vektorprisprocess betecknas

$$S = (S_1(t), ..., S_{n+1}(t))_{t=0}^T$$

och det förutsätts att den stokastiska variabeln $S(t) = (S_1(t), ..., S_{n+1}(t))$ är $\mathcal{F}_t$-mätbar i varje tidpunkt t. Det är naturligt att uppfatta $\mathcal{F}_t$ som den kända informationen vid tiden t. I fortsättningen antages alltid att

$$S_{n+1}(t) > 0, \ t = 0, ..., T.$$

Eftersom Ω är ändlig genereras σ-algebran $\mathcal{F}$ av en partition. Det förutsätts att varje element i partitionen har positiv sannolikhet. Det är därför ingen begränsning att antaga att

$$\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_d\},$$

$$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$$

och

$$P[\{\omega_k\}] > 0, \ k = 1, ..., d.$$

Om X är en reellvärd $\mathcal{F}$-mätbar stokastisk variabel så gäller därför att $X = 0$ n.s. med avseende på P om och endast om $X(\omega) = 0$ för alla $\omega \in \Omega$.

En $\mathbf{R}^m$-värd stokastisk process $(X(t))_{t=1}^T$ sägs vara predikterbar om $X(t)$ är $\mathcal{F}_{t-1}$- mätbar för $t = 1, ..., T$. En strategi

$$h = (h(t))_{t=0}^T$$

är en $\mathbf{R}^{n+1}$-värd stokastisk process sådan processen $(h(t))_{t=1}^T$ att predikterbar och $h(0) = h(1)$. Motsvarande värdeprocess ges av

$$V_h(t) = h(t) \cdot S(t) = \sum_{i=1}^{n+1} h_i(t) S_i(t), \ t = 0, ..., T.$$

Strategin sägs vara självfinansierande om

$$V_h(t) = h(t+1) \cdot S(t), \ t = 1, ..., T-1.$$

Om $(a(t))_{t=0}^T$ är en vektorvärd sekvens definieras differensen

$$\triangle a(t) = a(t) - a(t-1), \ t = 1, ..., T.$$

Sats 1. *Om h är en strategi så är h självfinansierande om och endast om*

$$\triangle V_h(t) = h(t) \cdot \triangle S(t), \ t = 1, ..., T.$$

Bevis. Definitionerna ger för $t = 1, ..., T$ att

$$\triangle V_h(t) = h(t) \cdot S(t) - h(t-1) \cdot S(t-1)$$

och

$$h(t) \cdot \triangle S(t) = h(t) \cdot S(t) - h(t) \cdot S(t-1)$$

vilket visar att

$$\triangle V_h(t) = h(t) \cdot \triangle S(t), \ t = 1, ..., T$$

om och endast om

$$h(t-1) \cdot S(t-1) = h(t) \cdot S(t-1), \ t = 1, ..., T$$

vilket visar påståendet. []

Om h är en strategi definieras den så kallade vinstprocessen $G_h = (G_h(t))_{t=0}^{T}$ av att

$$G_h(0) = 0$$

och

$$G_h(t) = h(1) \cdot \triangle S(1) + ... + h(t) \cdot \triangle S(t),\ t = 1, ..., T.$$

Sats 2. *Strategin h är självfinansierande om och endast om*

$$V_h(t) = V_h(0) + G_h(t),\ t = 0, 1, ..., T.$$

Bevis. Antag $t \in \{1, ..., T\}$. Det gäller att

$$V_h(t) - V_h(0) = \sum_{u=1}^{t} \triangle V_h(u).$$

Om h är självfinansierande visar sats 1 att

$$V_h(t) - V_h(0) = \sum_{u=1}^{t} h(u) \cdot \triangle S(u) = G_h(t).$$

Omvänt om den senare relationen är sann så följer att

$$\triangle V_h(t) = \triangle(V_h(t) - V_h(0)) = h(t) \cdot \triangle S(t)$$

och sats 1 visar att h är självfinansierande. []

En arbitragestrategi, eller helt enkelt ett arbitrage, är en självfinansierande strategi h sådan att

$$V_h(0) = 0,\ V_h(T) \geq 0 \text{ och } E\left[V_h(T)\right] > 0.$$

Vi skall närmast försöka ge nödvändiga och tillräckliga villkor för att arbitrage skall saknas i vår värdepappersmodell. För den skull väljs S_{n+1} som numerär och vi definierar

$$\bar{S}(t) = (\bar{S}_1(t), ..., \bar{S}_{n+1}(t)) = \frac{S(t)}{S_{n+1}(t)}.$$

Observera att den stokastiska variabeln $\bar{S}(t)$ är $\mathcal{F}_t$-mätbar i varje tidpunkt t. Om h är en strategi betecknar $\bar{V}_h$ värdeprocessen och $\bar{G}_h$ vinstprocessen relativt prisprocessen $\bar{S}$. Eftersom

$$h(t) \cdot S(t) = h(t+1) \cdot S(t)$$

om och endast om

$$h(t) \cdot \bar{S}(t) = h(t+1) \cdot \bar{S}(t)$$

så är h självfinansierande (relativt prisprocessen S) om och endast om h är självfinansierande då S_{n+1} används som numerär. I fortsättningen utnyttjas ofta relationen

$$\bar{V}_h(t) = \frac{V_h(t)}{S_{n+1}(t)}.$$

Det följer härav att vår värdepappersmodell är arbitragefri om och endast om modellen med prisprocessen $\bar{S}$ är arbitragefri.

Ett sannolikhetsmått Q definierat på σ-algebran $\mathcal{F}$ kallas ett ekvivalent martingalmått om Q och P är ekvivalenta och $(\bar{S}(t), \mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ är en martingal relativt sannolikhetsmåttet Q.

Sats 3 (Värdepappersteorins första huvudsats) *Modellen är arbitragefri om och endast om det existerar ett ekvivalent martingalmått.*

Beviset för "endast om" delen i värdepappersteorins första huvudsats bygger på följande lemma med $a = 0$. Allmänna fallet av detta lemma behövs senare i samband med värdepappersteorins andra huvudsats.

Lemma 1. *Antag a är ett reellt tal och $g = (g(t))_{t=1}^T$ en predikterbar process i $\mathbf{R}^n$. Det finns då en unik självfinansierande strategi h sådan att $\bar{V}_h(0) = a$ och*

$$(h_1(t), ..., h_n(t)) = g(t), \; t = 1, ..., T.$$

Bevis. Definiera först $(h_1(t), ..., h_n(t)) = g(t)$, $t = 1, ..., T$. Vi definierar därefter $h_i(0) = h_i(1)$, $i = 1, ..., n$, och $h_{n+1}(0)$ så att

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(0) \cdot \bar{S}_i(0) + h_{n+1}(0) = a.$$

Observera här att $\bar{S}_{n+1}(t) = 1$ för alla t. Storheten $(h_1(0), ..., h_{n+1}(0))$ är en konstant vektor. Sätt $h_{n+1}(1) = h_{n+1}(0)$ så att $h(0) = h(1)$. Vi definierar nu induktivt $h_{n+1}(t)$, $t = 2, ..., T$, så att

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(t) \cdot \bar{S}_i(t) + h_{n+1}(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i(t+1) \cdot \bar{S}_i(t) + h_{n+1}(t+1), \ \ t = 1, ..., T-1.$$

Det följer av definitionen att processen $(h(t))_{t=1}^{T}$ är predikterbar och att h är självfinansierande med S_{n+1} som numerär och därmed självfinansierande (relativt prisprocessen S). Entydighetsfrågan i lemmat följer också av konstruktionen av h_{n+1}. []

Bevis av sats 3. $\Leftarrow$: Antag Q är ett ekvivalent martingalmått och låt h vara en självfinansierande strategi sådan att $V_h(0) = 0$ och $V_h(T) \geq 0$. Vi skall visa att $V_h(T) = 0$ n.s. med avseende på P. Det räcker därför att visa att $\bar{V}_h(T) = V_h(T)/S_{n+1}(T) = 0$ n.s. med avseende på Q eftersom P och Q är ekvivalenta.

Om $t \in \{1, .., T\}$ så är

$$E^Q\left[h(t) \cdot \triangle\bar{S}(t)\right] = E^Q\left[E^Q\left[h(t) \cdot \triangle\bar{S}(t) \mid \mathcal{F}_{t-1}\right]\right]$$

$$= E^Q\left[h(t) \cdot E^Q\left[\triangle\bar{S}(t) \mid \mathcal{F}_{t-1}\right]\right] = E^Q\left[h(t) \cdot 0\right] = 0.$$

Eftersom

$$\bar{V}_h(T) = \bar{V}_h(0) + \bar{G}_h(t) = 0 + \sum_{t=1}^{T} h(t) \cdot \triangle\bar{S}(t)$$

följer att

$$E^Q\left[\bar{V}_h(T)\right] = 0.$$

Men $\bar{V}_h(T) \geq 0$ så vi kan dra slutsatsen att $\bar{V}_h(T) = 0$ n.s. med avseende på Q.

$\Rightarrow$: Låt $\bar{S}^n(t) = (\bar{S}_1(t), ..., \bar{S}_n(t))$, $t = 1, ..., n$. Om $g = (g(t))_{t=1}^{T}$ är en $\mathbf{R}^n$-värd predikterbar process definieras

$$Hg = g(1) \cdot \triangle\bar{S}^n(1) + ... + g(T) \cdot \triangle\bar{S}^n(T).$$

Enligt lemma 1 finns en självfinansierande strategi h sådan att $\bar{V}_h(0) = 0$ och

$$\bar{V}_h(T) = \bar{V}_h(0) + \bar{G}_h(t)$$

$$= 0 + \sum_{t=1}^{T} h(t) \cdot \triangle \bar{S}(t) = Hg.$$

Eftersom modellen saknar arbitrage måste $Hg \notin C$, där

$$C = \left\{ Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P);\ Y \geq 0 \text{ och } Y(\omega_k) > 0 \text{ för något } k = 1, ..., d \right\}.$$

Vi definierar nu ett linjärt rum

$$L = \left\{ Hg;\ g\ = (g(t))_{t=1}^{T} \text{ predikterbar process i } \mathbf{R}^n \right\}$$

och en konvex mängd

$$K = \{ Y \in C;\ E[Y] = 1 \}.$$

Det gäller att

$$K \cap L = \emptyset.$$

Mängden K är en kompakt delmängd av det ändligtdimensionella Hilbertrummet $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Enligt separationssatsen för kompakt konvex mängd och slutet delrum i Hilbertrum finns ett $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ så att

$$E[(Hg)Z] = 0 \text{ om } g\ = (g(t))_{t=1}^{T} \text{ predikterbar process i } \mathbf{R}^n$$

och

$$E[YZ] > 0, \text{ om } Y \in K.$$

Notera att

$$Z(\omega_k) = E\left[\frac{1_{\{\omega_k\}}}{P[\{\omega_k\}]} Z \right] > 0,\ k = 1, ..., d.$$

Vi definierar nu ett ett sannolikhetsmått Q på $\mathcal{F}$ genom att sätta

$$dQ = \frac{Z}{E[Z]} dP.$$

Sannolikhetsmåtten P och Q är ekvivalenta och

$$E^Q[Hg] = 0, \text{ om } g\ = (g(t))_{t=1}^{T} \text{ predikterbar process i } \mathbf{R}^n.$$

Låt nu $u \in \{1, ..., T\}$ vara fixt och antag $g = (g(t))_{t=1}^{T}$är en predikterbar process i $\mathbf{R}^n$ sådan att $g(t) = 0$ om $t \neq u$. Härav följer att

$$0 = E^Q[Hg] = E^Q\left[g(u) \cdot \triangle \bar{S}^n(u) \right].$$

Detta visar att processen $(\bar{S}^n(t), \mathcal{F}_t)_{t=1}^T$ är en Q-martingal varför processen $(\bar{S}(t), \mathcal{F}_t)_{t=1}^T$ också är en Q-martingal. []

Ett så kallat betingat kontrakt är ett värdepapper, som ger innehavaren ett belopp Y vid tiden T, där Y är en given $\mathcal{F}_T$-mätbar stokastisk variabel. I fortsättningen identifieras kontraktet och Y. Kontraktet är replikerbart om det existrerar en självfinansierande strategi h sådan att $V_h(T) = Y$. Modellen kallas komplett om varje betingat kontrakt kan replikeras.

Sats 4. *Antag modellen är arbitragefri och låt Y vara ett betingat kontrakt. Om h är en självfinansierande strategi som replikerar Y så gäller att*

$$V_h(t) = S_{n+1}(t) E^Q \left[\frac{Y}{S_{n+1}(T)} \mid \mathcal{F}_t \right], \; t = 0, 1, .., T$$

för varje ekvivalent martingalmått Q.

Bevis. Låt Q vara ett ekvivalent martingalmått. Sats 2 tillämpad med S_{n+1} som numerär visar att

$$\bar{V}_h(t) = \bar{V}_h(0) + \bar{G}_h(t)$$

och det följer att

$$\bar{V}_h(T) = \bar{V}_h(t) + \sum_{u=t+1}^{T} h(u) \cdot \triangle \bar{S}(u).$$

Eftersom $\bar{S} = (\bar{S}(t), \mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ är en Q-martingal följer för $t+1 \leq u \leq T$ att

$$E^Q \left[h(u) \cdot \triangle \bar{S}(u) \mid \mathcal{F}_t \right] = E^Q \left[E^Q \left[h(u) \cdot \triangle \bar{S}(u) \mid \mathcal{F}_{u-1} \right] \mid \mathcal{F}_t \right]$$

$$= E^Q \left[h(u) \cdot E^Q \left[\triangle \bar{S}(u) \mid \mathcal{F}_{u-1} \right] \mid \mathcal{F}_t \right] = E^Q \left[h(u) \cdot 0 \mid \mathcal{F}_t \right] = 0.$$

Det gäller därför att

$$E^Q \left[\bar{V}_h(T) \mid \mathcal{F}_t \right] = E^Q \left[\bar{V}_h(t) \mid \mathcal{F}_t \right] = \bar{V}_h(t)$$

dvs
$$E^Q\left[\frac{Y}{S_{n+1}(T)} \mid \mathcal{F}_t\right] = \frac{V_h(t)}{S_{n+1}(t)}$$
vilket visar satsen. []

Sats 5 (Värdepapperssteorins andra huvudsats) *Antag modellen är arbitragefri. Modellen är komplett om och endast om det finns exakt ett ekvivalent martingalmått.*

Bevis. $\Rightarrow$: Antag X är en $\mathcal{F}_T$-mätbar stokastisk variabel och Q_0 och Q_1 två ekvivalenta martingalmått. Sätt $Y = S_{n+1}(T)X$ och välj en självfinansierande strategi h som replikerar Y. Sats 4 ger att
$$V_h(0) = S_{n+1}(0)E^{Q_i}\left[\frac{Y}{S_{n+1}(T)}\right],\ i = 0, 1.$$
Alltså är
$$E^{Q_0}[X] = E^{Q_1}\left[\frac{Y}{S_{n+1}(T)}\right] = E^{Q_2}\left[\frac{Y}{S_{n+1}(T)}\right] = E^{Q_1}[X].$$
De två sannolikhetsmåtten Q_0 och Q_1 är alltså lika.

$\Leftarrow$: Det ekvivalenta martingalmåttet betecknas med Q. Vi låter H ha samma mening som i beviset för värdepapperssteorins första huvudsats dvs om $g = (g(t))_{t=1}^T$ är en $\mathbf{R}^n$-värd predikterbar process så ges Hg av ekvationen
$$Hg = g(1)\cdot\triangle\bar{S}^n(1) + ... + g(T)\cdot\triangle\bar{S}^n(T).$$
Vi definierar nu det linjära rummet
$$L = \left\{a + Hg;\ a \in \mathbf{R} \text{ och } g = (g(t))_{t=0}^T \text{äar en predikterbar process i } \mathbf{R}^n\right\}$$
och visar först att $L = L^0(\Omega, \mathcal{F}, Q) = L^2(\Omega, \mathcal{F}, Q)$. I motsatt fall finns enligt separationssatsen för punkt och slutet delrum i Hilbertrum ett $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ sådant att $Z \neq 0$ och
$$E^Q[YZ] = 0 \text{ om } Y \in L.$$

Genom att välja $Y = 1$ följer att $E^Q[Z] = 0$. Antag M är ett reellt tal sådant att $M > Z$ och definiera ett mått Q' på $\mathcal{F}$ genom att

$$dQ' = (1 + \frac{Z}{M})dQ.$$

Måttet Q' är ett sannolikhetsmått ekvivalent med Q. Om $Y \in L$ så är

$$E^{Q'}[Y] = E^Q\left[Y + \frac{1}{M}YZ\right]$$

$$= E^Q[Y] + \frac{1}{M}E^Q[YZ] = E^Q[Y].$$

Speciellt gäller att

$$E^{Q'}[Hg] = 0, \text{ om } g = (g(t))_{t=1}^T \text{är en predikterbar process i } \mathbf{R}^n.$$

Härav följer som i beviset för värdepapperssteorins första huvudsats att $(\bar{S}(t), \mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ är en Q'-martingal. Både Q och Q' är alltså ekvivalenta martingalmått och eftersom måtten är olika har vi fått en motsägelse. Alltså gäller att $L = L^0(\Omega, \mathcal{F}, Q)$.

Låt nu $Y \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ vara godtyckligt. Vi skall visa att Y är replikerbar. Sätt därför

$$X = \frac{Y}{S_{n+1}(T)}.$$

Eftersom $L = L^0(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ finns ett reellt tal a och en predikterbar process $g = (g(t))_{t=1}^T$ i $\mathbf{R}^n$ sådan att $X = a + Hg$. Enligt lemma 1 finns en självfinansierande strategi h sådan att $\bar{V}_h(0) = a$ och $(h_1(t), ..., h_n(t)) = g(t)$, $t = 1, ..., n$. Då är

$$X = \bar{V}_h(0) + \bar{G}_h(T) = \bar{V}_h(T) = h \cdot \bar{S}(T)$$

och det följer att $Y = h \cdot S(T) = V_h(T)$. []

Antag Y är ett replikerbart betingat kontrakt. Om modellen är arbitagefri och Q betecknar ett ekvivalent martingalmått så är enligt sats 4 uttrycket

$$\Pi_Y(t) = S_{n+1}(t)E^Q\left[\frac{Y}{S_{n+1}(T)} \mid \mathcal{F}_t\right]$$

oberoende av valet av ekvivalent martingalmått Q och kallas för det arbitragefria priset för Y vid tiden t. Om modellen både är arbitragefri och komplett så har således varje betingat kontrakt ett arbitragefritt pris.

Exempel 1. Betrakta följande värdepappersmodell bestående av en aktie och en obligation där tiden t är lika med 0 eller 1. Aktiens pris vid tiden t betecknas med $S(t)$ och obligationens pris vid tiden t betecknas med $B(t)$. Låt x_1, x_2 och x_3 vara reella tal sådana att $x_1 < x_2 < x_3$ och antag att

$$S(1) = S(0)e^X$$

där $S(0)$ är en positiv konstant och $X\colon\ \Omega \to \{x_1, x_2, x_3\}$ är en stokastisk variabel sådan att $p_i = P\left[X = x_i\right] > 0$, $i = 1, 2, 3$. Vidare gäller att

$$B(1) = B(0)e^r$$

där $B(0)$ är r är positiva konstanter.

Vi undersöker först under vilka villkor på parametrarna x_1, x_2, x_3 och r som modellen saknar arbitrage? Antag först det finns ett arbitrage dvs det finns reella h_S och h_B så att

$$h_S S(0) + h_B B(0) = 0$$

och

$$h_S S(0)e^{x_i} + h_B B(0)e^r \geq 0,\ \ i = 1, 2, 3$$

där strikt olikhet inträffar för något i. Sätts $a = h_S S(0)$ så följer att

$$a(e^{x_i} - e^r) \geq 0,\ \ i = 1, 2, 3$$

där strikt olikhet inträffar för något i. Alltså måste $r \notin \left]x_1, x_3\right[$. Omvänt om det gäller att $r \notin \left]x_1, x_3\right[$ så kan vi följa resonemanget från andra hållet och definiera ett arbitrage.

I fortsättningen antags att modellen är arbitragefri dvs $x_1 < r < x_3$ och vi representerar X som identitetsavbildningen i mängden $\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$. Det gäller att

$$P = p_1\delta_{x_1} + p_2\delta_{x_2} + p_3\delta_{x_3}$$

där $p_i > 0$, $i = 1, 2, 3$. Det finns många ekvivalenta martingalmått i detta fall. Antag nämligen att

$$Q = q_1\delta_{x_1} + q_2\delta_{x_2} + q_3\delta_{x_3}$$

där $q_i > 0$, $i = 1, 2, 3$ och

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

samt att

$$S(0) = e^{-r}E^Q[S(1)]$$

dvs

$$e^{x_1-r}q_1 + e^{x_2-r}q_2 + e^{x_3-r}q_3 = 1.$$

Här är

$$e^{x_1-r} < 1 < e^{x_3-r}$$

så det blir uppenbart genom att rita en figur att det finns många ekvivalenta martingalmått.

Antag fr o m nu $r < x_2$. Det är lätt att se att q_3 är olika för olika martingalmått. Vi definierar slutligen ett betingat kontrakt Y sådant att $Y(x_1) = Y(x_0) = 0$ och $Y(x_3) = 1$. Det reella talet

$$e^{-r}E^Q[Y] = e^{-r}q_3$$

är alltså beroende av vilket ekvivalent martingalmått Q som valts. Sats 4 visar att kontraktet Y inte är replikerbart, vilket också är lätt att direkt verifiera.

Att i en arbitragefri modell definiera priset för ett icke replikerbart betingat kontrakt faller utom ramen för denna kurs. []

Med hjälp av resultaten i detta kapitel kan man ana Black-Scholes pris för ett finansiellt derivat. Vi repeterar att det i Black-Scholes värdepappersmodell finns en aktie och en obligation. Aktiens prisprocess ges av ekvationen

$$S(t) = S(0)e^{\alpha t + \sigma W(t)},\ 0 \leq t \leq T$$

där $W = (W(t))_{0 \leq t \leq T}$ är en normaliserad Wienerprocess i tidsintervallet $[0, T]$. Obligationens prisprocess ges av ekvationen

$$B(t) = B(0)e^{rt},\ 0 \leq t \leq T.$$

Här är $\alpha, \sigma, S(0), B(0)$ och r reella konstanter varav de fyra sista är positiva. Om vi inför $\mu = \alpha + \frac{\sigma^2}{2}$ så följer att

$$\frac{S(t)}{B(t)} = \frac{S(0)}{B(0)} e^{(\mu-r)t} e^{-\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma W(t)}.$$

Genom att definiera marknadspriset för risk

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

och

$$W^\lambda(t) = W(t) + \lambda t,\ 0 \leq t \leq T$$

så följer att

$$\frac{S(t)}{B(t)} = \frac{S(0)}{B(0)} e^{-\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma W^\lambda(t)}.$$

Vidare garanterar Cameron-Martins sats att det finns ett sannolikhetsmått Q ekvivalent med P så att W^λ är en Wienerprocess relativt måttet Q. Men då är processen

$$\frac{S(t)}{B(t)} = \frac{S(0)}{B(0)} e^{-\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma W^\lambda(t)},\ 0 \leq t \leq T$$

en Wienermartingal relativt måttet Q.

Sätt $\mathcal{F}_t = \sigma(W(u);\ u \leq t)$, $0 \leq t \leq T$, och antag $g \in \mathcal{P}$. Om ett betingat kontrakt utbetalar beloppet $Y = g(S(T))$ slutdagen T och $\tau = T - t \geq 0$ så följer att

$$\begin{aligned}
B(t)E^Q\left[\frac{Y}{B(T)} \mid \mathcal{F}_t\right] &= e^{-r\tau}E^Q\left[g(S(T)) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= e^{-r\tau}E^Q\left[g(S(t)e^{\mu(T-t)+\sigma(W(T)-W(t))}) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= e^{-r\tau}E^Q\left[g(S(t)e^{r(T-t)+\sigma(W^\lambda(T)-W^\lambda(t))}) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= e^{-r\tau}E^Q\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(W^\lambda(T)-W^\lambda(t))})\right]_{|s=S(t)} \\
&= e^{-r\tau}E^Q\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma W^\lambda(\tau)})\right]_{|s=S(t)}
\end{aligned}$$

dvs vi har fått Black-Scholes pris bekant bl a från kursen Optioner och matematik. Exempel 1 antyder emellertid att ovanstående inte är mycket värt såvida kontraktet Y ej i någon lämplig mening är replikerbart. Vi återkommer till denna besvärliga punkt senare.