6. Några Gaussiska obligationsmodeller

En så kallad nollkupongsobligation med lösendag T och nominellt värde 1 är ett kontrakt som ger innehavaren beloppet 1 vid tiden T och sedan är borta från marknaden. Detta värdepapper kallas här en T-obligation. I fortsättningen förutsätts att det finns en T-obligation för varje $T \geq 0$ i vår matematiska modell. Precis som i kapitel 1 betecknas T-obligationens pris vid tiden t med $p(t,T)$ och vi skriver

$$p(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)}.$$

Storheten $R(t,T)$ kallas för $(T-t)$-räntan vid tiden t och kurvan

$$y = R(t,T),\ T \geq t$$

kallas för avkastningskurvan vid tiden t. En matematisk modell för familjen av obligationspriser $p(t,T)$, $0 \leq t \leq T$, $T \geq 0$, ger alltså en modell för den viktiga avkastningskurvan.

Antag $t \leq T < U$ och låt $R(t,T,U)$ beteckna forwardräntan för perioden $[T,U]$ kontrakterad vid tiden t. Kravet på arbitagefrihet medför att

$$p(t,U) = p(t,T)e^{-R(t,T,U)(U-T)}$$

vilket inses av följande tabell.

tid	t	T	U
handling	sälj en T-obligation köp $\frac{p(t,T)}{p(t,U)}$ st U-obligationer		
kassaflöde	0	-1	$\frac{p(t,T)}{p(t,U)}$

Vi förutsätter att gränsvärdet

$$f(t,T) = \lim_{U \to T} R(t,T,U)$$

existerar dvs derivatan

$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln p(t,T)}{\partial T}$$

förutsätts existera. Storheten $f(t,T)$ kallas den momentana forwardräntan vid tiden T sedd från tidpunkten t. Under lämpliga regularitetsförutsättningar gäller att

$$p(t,U) = p(t,T)e^{-\int_T^U f(t,u)du}, \ t \leq T \leq U.$$

Den korta räntan $r(t)$ vid tiden t definieras av ekvationen

$$r(t) = f(t,t).$$

Sätt

$$B(t) = B(0)e^{\int_0^t r(u)du}, \ t \geq 0$$

där $B(0)$ är en positiv konstant. Antag beloppet $B(0)$ vid tiden 0 placeras i en obligation med närmast omedelbar inlösen och att det vid lösen utbetalade beloppet omedelbart placeras i en obligation med närmast omedelbar inlösen osv. Kapitalet $B(t)$ vid tiden t blir då

$$B(t) = B(0)e^{\int_0^t r(u)du}.$$

Observera att

$$dB(t) = r(t)B(t)dt.$$

Alternativt kan vi tänka oss att $B(t)$ representerar banksaldot vid tiden t om beloppet $B(0)$ satts i banken vid tiden 0. I verkligheten finns endast ändligt många obligationer så den senare tolkningen av $B(t)$ kan vara den bästa.

För att komma något närmare förutsättningarna i värdepappersteorins huvudsatser kan man utan inskränkning antaga att

$$p(t,T) = e^{\int_T^t r(u)du} \text{ om } t > T.$$

Om man vill ge en matematisk modell för prisprocesserna $(p(t,T))_{t\geq 0}$, $T \geq 0$, är det med tanke på värdepappersteorins huvudsatser naturligt att försöka bestämma ett sannolikhetsrum $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ och en filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sådan att varje $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$. Dessutom skall $r(t)$ och $p(t,T)$ vara $\mathcal{F}_t$-mätbara för alla $t \geq 0$ samt

$$(\frac{p(t,T)}{B(t)}, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$$

en martingal relativt Q. Speciellt gäller då för varje att $t \leq T$ att

$$\frac{p(t,T)}{B(t)} = E^Q \left[\frac{1}{B(T)} \mid \mathcal{F}_t \right]$$

dvs

$$p(t,T) = E^Q \left[e^{-\int_t^T r(u)du} \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Det är därför naturligt att börja experimentera med de ingående parametrarna i högra ledet och undersöka om formeln kan generera rimliga avkastningskurvor. Ett finansiellt derivat av europeisk typ som ger innehavaren det $\mathcal{F}_T$-mätbara beloppet $Y \in L^2(Q)$ slutdagen T bör i så fall ha det teoretiska priset

$$\Pi_Y(t) = E^Q \left[e^{-\int_t^T r(u)du} Y \mid \mathcal{F}_t \right]$$

vid tiden $t \leq T$. Observera att $p(t,T) = \Pi_Y(t)$ då $Y = 1$.

I Vasičeks modell antags att W är en reellvärd Wienerprocess relativt sannolikhetsmåttet Q och att den korta räntan uppfyller ekvationen

$$dr(t) = (b - ar(t))dt + \sigma dW(t), \ t \geq 0$$

där informationen ges av filtrationen $\mathcal{F}_t = \sigma(r(s);\, s \leq t)$, $t \geq 0$. Här är a, b och σ positiva konstanter. Eftersom den korta räntan blir en Markovprocess är

$$p(t,T) = E^Q \left[e^{-\int_t^T r(u)du} \mid r(t) \right], \text{ om } t \leq T$$

varför $p(t,T) = F(t, r(t), T)$, där F är deterministisk.

Sats 1. *I Vasičeks modell gäller att*

$$p(t,T) = e^{A(t,T) - B(t,T)r(t)}$$

där

$$B(t,T) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)})$$

och

$$A(t,T) = \frac{(B(t,T) - T + t)(ab - \frac{1}{2}\sigma^2)}{a^2} - \frac{\sigma^2 B^2(t,T)}{4a}.$$

Bevis. Sätt $r(t) = X(t) + c(t)$ så att

$$dX(t) + dc(t) = (b - aX(t) - ac(t))dt + \sigma dW(t).$$

Funktionen $c(t)$ väljs så att

$$dc(t) = (b - ac(t))dt$$

och $c(0) = 0$. Detta ger

$$c(t) = e^{-at} \int_0^t b e^{au} du = \frac{b}{a}(1 - e^{-at}).$$

Vi löser nu ekvationen

$$dX(t) = -aX(t)dt + \sigma dW(t)$$

med den integrerande faktorn e^{at} och får med beteckningen $X(0) = r(0) = x$ att

$$X(t) = e^{-at}x + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{au} dW(u).$$

Processen $X = (X(t))_{t \geq 0}$ är Gaussisk med väntevärde

$$E^Q[X(t)] = e^{-at}x$$

och kovarians

$$\mathrm{Cov}^Q(X(s), X(t)) = \sigma^2 e^{-a(s+t)} E^Q\left[(\int_0^s e^{au} dW(u) \int_0^t e^{au} dW(u)) \right]$$

$$= \sigma^2 e^{-a(s+t)} \int_0^{\min(s,t)} e^{2au} du = \frac{\sigma^2}{2a} e^{-a(s+t)} (e^{2a \min(s,t)} - 1).$$

Sätt

$$Y = \int_0^T X(t) dt.$$

Den stokastiska variabeln Y är Gaussiskt fördelad med väntevärde

$$E^Q[Y] = \int_0^T E^Q[X(t)]\, dt$$

$$= \int_0^T e^{-at} x dt = \frac{x}{a}(1 - e^{-aT})$$

och varians

$$\mathrm{Var}^Q(Y) = \mathrm{Cov}^Q(\int_0^T X(s)ds, \int_0^T X(t)dt)$$

$$= \int_0^T \int_0^T \mathrm{Cov}^Q(X(s), X(t))dsdt = \frac{\sigma^2}{2a} \int_0^T \int_0^T e^{-a(s+t)}(e^{2a\min(s,t)} - 1)dsdt$$

$$= \frac{\sigma^2}{2a^3}(2aT - 3 + 4e^{-aT} - e^{-2aT}).$$

Härav följer att

$$E^Q\left[e^{-\int_0^T r(t)dt}\right] = e^{-\int_0^T c(t)dt} E^Q\left[e^{-Y}\right] =$$

$$= e^{-\int_0^T \frac{b}{a}(1-e^{-at})dt} e^{-\frac{r(0)}{a}(1-e^{-aT}) + \frac{\sigma^2}{4a^3}(2aT-3+4e^{-aT}-e^{-2aT})}$$

$$= e^{A(0,T)-B(0,T)r(0)}.$$

Eftersom $A(0,T-t) = A(t,T)$ and $B(0,T-t) = B(t,T)$ om $t \leq T$ följer allmänna fallet direkt från fallet $t = 0$. []

Om det finns ett marknadspris för T-obligationen vid tiden t betecknas detta med med $p^*(t,T)$. Antag vi befinner oss vid tiden $t = 0$. Eftersom det endast finns ändligt många obligationer på marknaden existerar $p^*(0,T)$ endast för ändligt många värden på T. Genom någon lämplig form av skattning erhålls fiktiva marknadspriser $p^*(0,T)$ för övriga värden på $T \geq 0$. Om det råder en total överensstämmelse mellan teoretiska obligationspriser och motsvarande eventuellt skattade marknadspriser så skall det, enligt sats 1, för varje $T \geq 0$ gälla att

$$\log p^*(0,T)$$

$$= \frac{(B(0,T) - T)(ab - \frac{1}{2}\sigma^2)}{a^2} - \frac{\sigma^2 B^2(0,T)}{4a} - B(0,T)r(0)$$

där

$$B(0,T) = \frac{1}{a}(1 - e^{-aT}).$$

Här finns dock inte tillräckligt många parametrar att spela med för att en sådan överensstämmelse i praktiken skall kunna gälla. I Hull-Whites modell, som generaliserar Vasičeks modell, ersätts konstanten b med en tidsberoende funktion $\Theta(t)$ och det antags att

$$dr(t) = (\Theta(t) - ar(t))dt + \sigma dW(t), \ t \geq 0.$$

Nedan visas att det går att uppnå en total överensstämmelse mellan marknadspriser och teoretiska priser för T-obligationena vid tiden $t = 0$ om funktionen Θ väljs på lämpligt sätt. Vi härleder dock först en analytisk prisformel för T-obligationerna.

Sats 2. *I Hull-Whites modell gäller att*

$$p(t,T) = e^{A(t,T) - B(t,T)r(t)}$$

där

$$B(t,T) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)})$$

och

$$A(t,T) = \int_t^T \left\{ \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(u,T) - \Theta(u)B(u,T) \right\} du.$$

Bevis. Sätt $r(t) = X(t) + c(t)$ så att

$$dX(t) + dc(t) = (\Theta(t) - aX(t) - ac(t))dt + \sigma dW(t).$$

Funktionen $c(t)$ väljs så att

$$dc(t) = (\Theta(t) - ac(t))dt$$

och $c(0) = 0$. Detta ger

$$c(t) = e^{-at} \int_0^t e^{au} \Theta(u) du$$

Vi löser nu ekvationen

$$dX(t) = -aX(t)dt + \sigma dW(t)$$

med den integrerande faktorn e^{at} och får med beteckningen $X(0) = r(0) = x$ att

$$X(t) = e^{-at}x + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{au} dW(u).$$

Processen $X = (X(t))_{t\geq 0}$ är Gaussisk med väntevärde

$$E^Q[X(t)] = e^{-at}x$$

och kovarians

$$\mathrm{Cov}^Q(X(s), X(t)) = \sigma^2 e^{-a(s+t)} E^Q\left[(\int_0^s e^{au} dW(u) \int_0^t e^{au} dW(u)) \right]$$

$$= \sigma^2 e^{-a(s+t)} \int_0^{\min(s,t)} e^{2au} du = \frac{\sigma^2}{2a} e^{-a(s+t)} (e^{2a\min(s,t)} - 1).$$

Sätt

$$Y = \int_0^T X(t) dt.$$

Den stokastiska variabeln Y är Gaussiskt fördelad med väntevärde

$$E^Q[Y] = \int_0^T E^Q[X(t)]\, dt$$

$$= \int_0^T e^{-at} x dt = \frac{x}{a}(1 - e^{-aT})$$

och varians

$$\mathrm{Var}^Q(Y) = \mathrm{Cov}^Q(\int_0^T X(s) ds, \int_0^T X(t) dt)$$

$$= \int_0^T \int_0^T \mathrm{Cov}^Q(X(s), X(t)) ds dt = \frac{\sigma^2}{2a} \int_0^T \int_0^T e^{-a(s+t)} (e^{2a\min(s,t)} - 1) ds dt$$

$$= \frac{\sigma^2}{2a^3}(2aT - 3 + 4e^{-aT} - e^{-2aT}).$$

Härav följer att

$$E^Q\left[e^{-\int_0^T r(t)dt} \right] = e^{-\int_0^T c(t)dt} E^Q\left[e^{-Y} \right] =$$

$$= e^{-\int_0^T e^{-at}(\int_0^t e^{au}\Theta(u)du)dt} e^{-\frac{r(0)}{a}(1-e^{-aT}) + \frac{\sigma^2}{4a^3}(2aT-3+4e^{-aT}-e^{-2aT})}$$

$$= e^{A(0,T) - B(0,T)r(0)}.$$

Detta visar fallet $t = 0$ och allmänna fallet är en enkel följd av detta specialfall. []

Vi skriver

$$p(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,u)du}$$

och

$$p^*(t,T) = e^{-\int_t^T f^*(t,u)du}$$

där $p^*(t,T)$ betecknar (det eventuellt skattade) marknadspriset för T-obligationen vid tiden t. Vi skall i nästa steg visa att det är möjligt att bestämma funktionen $\Theta(t)$, $t \geq 0$, så att varje obligation får samma marknadspris och teoretiska pris vid tiden $t = 0$. Ansatsen

$$p(0,T) = p^*(0,T), \text{ alla } T \geq 0$$

eller

$$e^{A(0,T)-B(0,T)r(0)} = e^{-\int_0^T f^*(0,u)du}, \text{ alla } T \geq 0$$

är ekvivalent med att

$$A'_T(0,T) - B'_T(0,T)r(0) = -f^*(0,T), \text{ alla } T \geq 0.$$

Ekvationen

$$B(t,T) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)})$$

ger

$$B'_T(t,T) = e^{-a(T-t)}$$

och av

$$A(0,T) = \int_0^T \left\{ \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(u,T) - \Theta(u)B(u,T) \right\} du$$

följer att

$$A'_T(0,T) = \int_0^T \left\{ \sigma^2 B(u,T)B'_T(u,T) - \Theta(s)B'_T(u,T) \right\} du$$

$$= \int_0^T \left\{ \sigma^2 \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-u)})e^{-a(T-u)} - \Theta(u)e^{-a(T-u)} \right\} du.$$

Alltså blir

$$f^*(0,T) = B'_T(0,T)r(0) - A'_T(0,T)$$

$$= e^{-aT}r(0) + \int_0^T \Theta(u)e^{-a(T-u)}du - \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-aT})^2$$

För att lösa ut $\Theta(t)$ deriveras med avseende på T, vilket ger

$$f_T^{*\prime}(0,T) = -ae^{-aT}r(0) + \Theta(T) - a\int_0^T \Theta(u)e^{-a(T-u)}ds - \frac{\sigma^2}{a}(1-e^{-aT})e^{-aT}.$$

Härav följer att

$$f_T^{*\prime}(0,T) + af^*(0,T) = \Theta(T) - \frac{\sigma^2}{a}(1-e^{-aT)})e^{-aT} - \frac{\sigma^2}{2a}(1-e^{-aT})^2$$

dvs

$$f_T^{*\prime}(0,T) + af^*(0,T) = \Theta(T) - \frac{\sigma^2}{2a}(1-e^{-2aT}).$$

Genom att välja

$$\Theta(T) = f_T^{*\prime}(0,T) + af^*(0,T) + \frac{\sigma^2}{2a}(1-e^{-2aT}).$$

blir således

$$p(0,T) = p^*(0,T)$$

för alla $T \geq 0$.

Det är nu naturligt att gå vidare och bestämma teoretiska priser för finansiella derivat med obligationer som underliggande värdepapper i Vasičeks och Hull-Whites modeller. Betrakta ett finansiellt derivat av europeisk typ som slutdagen T ger innehavaren beoppet $Y = g(r(T)) \in L^2(Q)$. Derivatets pris vid tiden $t \leq T$ bör som ovan sagts ges

$$E^Q\left[e^{-\int_t^T r(s)ds}g(r(T)) \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Eftersom den korta räntan är en Markovprocess relativt måttet Q blir priset vid tiden t av formen $v(t, r(t))$, där

$$v(t,r) = E^Q\left[e^{-\int_t^T r(s)ds}g(r(T)) \mid r(t) = r\right].$$

Om derivatet ifråga är en köpoption i U-obligationen med slutdag T och lösenpris K kr blir

$$\begin{aligned} g(r(T)) &= \max(0, p(T,U) - K) \\ &= \max(0, e^{A(T,U)-B(T,U)r(T)} - K). \end{aligned}$$

Köpoptionens pris call(t,K,T,U) vid tiden $t \le T$ erhålls genom att beräkna

$$\mathrm{call}(t,K,T,U) = E^Q\left[e^{-\int_t^T r(s)ds}\max(0, e^{A(T,U)-B(T,U)r(T)} - K) \mid r(t)\right]$$

vilket i princip är enkelt eftersom eftersom $(\int_t^T r(s)ds, r(T))$ har en bivariat normalfördelning. Räkningarna blir dock jobbiga och vi föredrar andra metoder, som presenteras i ett senare kapitel då följande resultat kommer att visas.

Sats 3. *Antag $T < U$. I Vasičeks och Hull-Whites modeller gäller att*

$$\mathrm{call}(t,K,T,S) = p(t,U)\Phi(d) - p(t,T)K\Phi(d-\sigma_p)$$

där

$$d = \frac{1}{\sigma_p}\ln\frac{p(t,U)}{Kp(t,T)} + \frac{1}{2}\sigma_p$$

och

$$\sigma_p = \frac{1}{a}\left\{1 - e^{-a(U-T)}\right\}\sqrt{\frac{\sigma^2}{2a}\left\{1 - e^{-2a(T-t)}\right\}}.$$

Om vi utnyttjar att

$$p(T,U) - \max(0, p(T,U) - K)$$
$$= K - \max(0, K - p(T,U))$$

så följer av ett arbitrageargument att

$$p(t,U) - \mathrm{call}(t,K,T,U) = Kp(t,T) - \mathrm{put}(t,K,T,U)$$

där put(t,K,T,U) betecknar priset vid tiden $t \le T$ för en europeisk säljoption i U-obligationen med slutdag T och lösenpris K. I Vasičeks och Hull-Whites modeller blir, med samma beteckningar som i sats 3,

$$\mathrm{put}(t,K,T,U) = K\Phi(d-\sigma_p) - p(t,U)\Phi(-d).$$

Det är också intressant att studera optioner på kupongobligationer. Antag $T_0 < T_1 < T_2 < ... < T_n$, $c_1, ..., c_n > 0$ och $N > 0$. En kupongobligation med emissionsdag T_0 ger innehavaren beloppet c_i kupongdagen T_i för

$i = 1, ..., n$. Dessutom erhåller innehavaren det nominella värdet N slutdagen T_n. Genom att sätta

$$a_i = \begin{cases} c_i, i = 1, ..., n-1 \\ c_n + N, \ \ i = n \end{cases}$$

så följer att obligationens värde $p(t)$ vid tiden $t \in [T_0, T_1[$ är lika med

$$p(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i p(t, T_i).$$

Betrakta nu en köpoption på obligationen ovan med lösenpris K och slutdag $T \in [T_0, T_n] \setminus \{T_0, T_1, ..., T_n\}$. Vi vill bestämma optionens värde $v(t)$ vid tiden $t \leq T$ och förutsätter Vasičeks eller Hull-Whites modeller. Vi kan utan inskränkning anta att $T_0 < T < T_1$ genom att eventuellt numrera om kupongdagarna.

Vi repeterar att

$$p(t, U) = p(t, U; r(t)) = e^{A(t,U) - B(t,U) r(t)}$$

där $A(t, U)$ och $B(t, U)$ är deterministiska och $B(t, U) > 0$ om $t < U$. Det gäller att

$$v(T) = \max(0, \sum_{i=1}^{n} a_i p(T, T_i) - K).$$

En väldigt snabb beräkning av $v(t)$ erhålls med följande trick. Låt det reella talet r_* uppfylla

$$K = \sum_{i=1}^{n} a_i p(T, T_i; r_*)$$

så att

$$v(T) = \max(0, \sum_{i=1}^{n} a_i (p(T, T_i; r(T)) - p(T, T_i; r_*)).$$

Eftersom varje funktion

$$r \to p(T, T_i; r)$$

är strikt avtagande (i Vasičeks och Hull-Whites modeller) så följer att

$$v(T) = \sum_{i=1}^{n} a_i \max(0, p(T, T_i; r(T)) - p(T, T_i; r_*))$$

och därmed är

$$v(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i c(t, p(T, T_i; r_*), T, T_i).$$

För att diskutera hedging behöver vi först förbättra den stokastiska integrationsteorin från kapitel 1. Vi passar dock på att redan här definiera de viktigaste derivaten på räntemarknaden, nämligen caps och swaptions. Det är lämpligt att starta med några inledande exempel.

Exempel 1. Ett lån på beloppet N, som kontrakteras vid tiden 0, löper med marknadsräntan L över perioden från T till U. Här är L känd fr o m tiden T och ges av ekvationen

$$p(T,U) = \frac{1}{1+\delta L}$$

där $\delta = T - U$. Låntagaren betalar tillbaka beloppet $N(1+\delta L)$ vid tiden U.

En enkel swap med swapräntan R ger värdepapperets innehavare beloppet

$$X = N\delta(L-R)$$

vid tiden U. Vi skall bestämma derivatets värde $v(t)$ vid tiden $t \leq T$.

Det gäller att

$$\delta L = \frac{1}{p(T,U)} - 1$$

och därmed

$$X = N(\frac{1}{p(T,U)} - 1 - \delta R).$$

Sätt

$$R^* = 1 + \delta R$$

så att

$$X = N(\frac{1}{p(T,U)} - R^*).$$

Notera att X är känd vid tiden T . I en arbitragefri modell följer nu att

$$v(T) = N(1 - R^* p(T,U))$$

och

$$v(t) = N(p(t,T) - R^* p(t,U)).$$

[]

Exempel 2. Ett lån på beloppet N, som kontrakteras vid tiden 0, löper med marknadsräntan L över perioden från T till U. Här är L känd fr o m tiden T och ges av ekvationen

$$p(T,U) = \frac{1}{1+\delta L}$$

där $\delta = T - U$. Låntagaren betalar tillbaka beloppet $(1+\delta L)K$ vid tiden U.

En caplet med capräntan R utbetalar beloppet

$$Y = N\delta \max(L - R, 0)$$

vid tiden U. Med samma beteckningar som i föregående exempel blir

$$Y = N \max(0, \frac{1}{p(T,U)} - R^*)$$

och om $v(t)$ betecknar derivatets värde vid tiden $t \leq T$ blir

$$v(T) = N \max(0, 1 - R^* p(T,U))$$

eller

$$v(T) = NR^* \max(0, \frac{1}{R^*} - p(T,U)).$$

Vår caplet är alltså likvärdig med NR^* stycken europeiska säljoptioner på U-obligationen med slutdagen T och lösenpriset $\frac{1}{R^*}$. Från ovanstående följer därför att vi kan beräkna capletens teoretiska pris i Vasičeks och Hull-Whites modeller. []

Med dessa förberedande exempel är det dags att definiera caps och swaptions. Antag

$$T_0 < T_1 < ... < T_n$$

och

$$\delta = T_i - T_{i-1},\ i = 1, ..., n.$$

Betrakta nu ett lån på beloppet N som i varje intervall $[T_{i-1}, T_i[$ löper med marknadsräntan

$$L_{i-1} = \frac{1}{\delta}(\frac{1}{p(T_{i-1}, T_i)} - 1)$$

för $i = 1, ..., n$. Vid tiden T_i betalar låntagaren beloppet

$$N\delta L_{i-1}$$

till långivaren för $i = 1, ..., n$. Vid tiden T_n återbetalas också beloppet N.

En cap med capräntan R ger capinnehavaren beloppet

$$N\delta \max(0, L_{i-1} - R)$$

vid tiden T_i för varje $i = 1, ..., n$. En cap är alltså en serie av caplets och kan värderas så snart caplets kan värderas.

En swap med swapräntan R ger innehavaren beloppet

$$N\delta(L_{i-1} - R)$$

vid tiden T_i för varje $i = 1, ..., n$. Vid tiden $t \leq T_0$ är detta belopp i sin tur värt

$$N(p(t, T_{i-1}) - R^* p(t, T_i))$$

enligt exempel 1. Swapens värde vid tiden $t \leq T_0$ blir alltså

$$\mathrm{swap}(t, R) = \sum_{i=1}^{n} N(p(t, T_{i-1}) - R^* p(t, T_i))$$

$$= N \sum_{i=1}^{n} (p(t, T_{i-1}) - (1 + \delta R) p(t, T_i))$$

$$= N(p(t, T_0) - p(t, T_n) - \delta R \sum_{i=1}^{n} p(t_i, T_i)).$$

Antag nu att $t \leq T \leq T_0$. En swaption med swapräntan R ger slutdagen T innehavaren beloppet

$$N \max(0, p(T, T_0) - p(T, T_n) - \delta R \sum_{i=1}^{n} p(T, T_i)).$$

Den så kallade forwardswapräntan $R(t)$ sätts så att swapen blir värdelös vid tiden t. Alltså gäller att

$$R(t) = \frac{p(t, T_0) - p(t, T_n)}{\delta \sum_{i=1}^{n} p(t_i, T_i)}.$$

Vår swaption har alltså slutdagen T värdet

$$(N\delta \sum_{i=1}^{n} p(T, T_i)) \max(0, R(T) - R).$$

I det fall att $T = T_0$ är en swaption av samma typ som en säljoption på en kupongobligation. I Vasičeks och Hull-Whites modeller reduceras detta värderingsproblem till att värdera säljoptioner på nollkupongsobligationer.

Övningar

1. Visa att
$$\mathrm{Cor}(R(t,T), R(t,U)) = 1, \; t < T \leq U$$
i Vasičeks och Hull-Whites modeller.

2. Beräkna
$$Q\left[r(t) < 0\right]$$
i Vasičeks och Hull-Whites modeller.

3. Visa att
$$R(t,T) \to \frac{ab - \frac{1}{2}\sigma^2}{a^2} \text{ då } T \to \infty.$$
i Vasičeks modell.

4. Bestäm den momentana forwardräntan i Vasičeks och Hull-Whites modeller.