7. Stokastiska integraler av Itôs typ

Antag $(W(t))_{0\leq t\leq T}$ är en reellvärd normaliserad Wienerprocess i tidsintervallet $[0,T]$ med kontinuerliga trajektorier. Vi har i kapitel 1 definierat den stokastiska integralen

$$\int_0^T f(t)dW(t)$$

då integranden f är en deterministisk kvadratiskt integrerbar funktion i intervallet $[0,T]$. I detta kapitel skall vi utvidga integralbegreppet till stokastisk integrand under lämpliga förutsättningar på integranden. Exempelvis skall vi ge en mening åt integralen

$$\int_0^T \varphi(W(t))dW(t)$$

då φ är en kontinuerlig funktion. I samband med definitionen uppstår ett intressant fenomen som vi belyser i specialfallet $\varphi(x)=x$. Antag att

$$\Delta : 0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = T$$

är en indelning av intervallet $[0,T]$. Om vi vill definiera integralen

$$\int_0^T W(t)dW(t)$$

är det naturligt att välja tal $\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$, $k=0,...,n-1$, och därefter studera konvergensegenskaper för Riemannsumman

$$I(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} W(\xi_k)(W(t_{k+1}) - W(t_k))$$

då indelningens finhet går mot noll. Om $\xi_k = t_k$, $k=0,...,n-1$, skrivs $I(\xi) = I_{vänster}$ och om $\xi_k = t_{k+1}$, $k=0,...,n-1$, skrivs $I(\xi) = I_{höger}$. Alltså gäller att

$$I_{vänster} = \sum_{k=0}^{n-1} W(t_k)(W(t_{k+1}) - W(t_k))$$

och

$$I_{höger} = \sum_{k=0}^{n-1} W(t_{k+1})(W(t_{k+1}) - W(t_k)).$$

Härav följer att

$$I_{höger} + I_{vänster} = \sum_{k=0}^{n-1} (W^2(t_{k+1}) - W^2(t_k)) = W^2(T)$$

och

$$I_{höger} - I_{vänster} = \sum_{k=0}^{n-1} (W(t_{k+1}) - W(t_k))^2.$$

I kapitel 2 visade vi att

$$\sum_{k=0}^{n-1} (W(t_{k+1}) - W(t_k))^2 \to T \text{ i } L^2(P)$$

då indelningens finhet går mot noll. Härav följer att

$$I_{höger} \to \frac{1}{2} W^2(T) + \frac{1}{2} T \text{ i } L^2(P)$$

och

$$I_{vänster} \to \frac{1}{2} W^2(T) - \frac{1}{2} T \text{ i } L^2(P)$$

då indelningens finhet går mot noll. Valet av sekvens ξ_k, $k = 0, ..., n-1$, i Riemannsumman $I(\xi)$ har därför en avgörande betydelse för vilket gränsvärde vi får. Inom teorin för värdepapper är vänsteralternativet det bästa och som en konsekvens härav blir den stokastiska integralen

$$\int_0^T W(t) dW(t)$$

lika med

$$\frac{1}{2} W^2(T) - \frac{1}{2} T.$$

Om funktionen $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är två gånger kontinuerligt deriverbar så följer också den märkliga formeln

$$\varphi(W(T)) = \varphi(0) + \int_0^T \varphi'(W(t)) dW(t) + \frac{1}{2} \int_0^T \varphi''(W(t)) dt.$$

I detta kapitel kommer vi främst att betona algebraiska egenskaper för stokastiska integraler medan vi tar lättare på frågor som berör mätbarhet och topologi. Bland läroböcker inom stokastisk integration vill vi särskilt nämna Chung och Williams $[CW]$, Friedman $[FR]$ och Øksendal $[\emptyset K]$.

Vi startar vår utveckling av stokastisk integration med ett komplett sannolikhetsrum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ och en familj σ-algebror $\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T$, av delmängder av Ω sådan att

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F},\ s \leq t.$$

Familjen $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ kallas för en filtration. Dessutom förutsätts här att

$$A \in \mathcal{F}_0 \text{ om } A \in \mathcal{F} \text{ och } P(A) = 0.$$

Antag vidare att $(W(t))_{0 \leq t \leq T}$ är en normaliserad reellvärd Wienerprocess med kontinuerliga trajektorier definierad på sannolikhetsrummet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sådan att

$$\sigma(W(u);\ \ u \leq t) \subseteq \mathcal{F}_t$$

och

$$\mathcal{F}_t \text{ och } \sigma(W(u) - W(t);\ t \leq u \leq T) \text{ är stokastiskt oberoende}$$

för alla $0 \leq t \leq T$. Definitionerna, som kan synas trassliga, motiveras bl a av att de portföljer vi senare skall studera ofta innehåller flera aktier.

Låt $\mathcal{B}[0,T] = \mathcal{B}_{[0,T]}(\mathbf{R})$ beteckna mängden av alla $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ som är en delmängd av intervallet $[0,T]$. En reellvärd funktion $f(t,\omega)$, $t \in [0,T]$, $\omega \in \Omega$, sägs vara progressivt mätbar om avbildningen

$$(u,\omega) \to f(u,\omega),\ (u,\omega) \in [0,t] \times \Omega$$

är $(\mathcal{B}[0,t] \times \mathcal{F}_t)$-mätbar för varje fixt $t \in [0,T]$. Vi uppfattar här $f = (f(t))_{0 \leq t \leq T}$ som en stokastisk process. Man kan visa att det för en progressivt mätbar process f gäller att avbildningen

$$t \to f(t,\omega),\ t \in [0,T]$$

är $\mathcal{B}[0,T]$-mätbar för varje $\omega \in \Omega$ och att f är adapterad dvs avbildningen

$$\omega \to f(t,\omega),\ \omega \in \Omega$$

är $\mathcal{F}_t$-mätbar för varje $t \in [0,T]$. Man kan visa att det finns en σ-algebra $\mathcal{G}_{prog}$ av delmängder av produktmängden $[0,T] \times \Omega$ sådan att f är progressivt mätbar om och endast om f är $\mathcal{G}_{prog}$-mätbar. Antag att $p \in [1, \infty[$. Om processen $f = (f(t))_{0 \leq t \leq T}$ är progressivt mätbar och dessutom

$$\int_0^T \mid f(t) \mid^p dt < \infty \text{ n.s.}$$

säger vi att f tillhör klassen $\mathcal{L}^p_{loc}[0,T]$. Vi uppfattar här f som 0 så snart

$$\int_0^T \mid f(t) \mid^p dt = 0 \text{ n.s.}$$

Om $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^p_{loc}[0,T]$ och $f_1 - f_2 = 0$ i $\mathcal{L}^p_{loc}[0,T]$ skriver vi $f_1 = f_2$. Råkar $f \in \mathcal{L}^p_{loc}[0,T]$ vara begränsad n.s. säger vi att f tillhör klassen $\mathcal{L}^\infty_{loc}[0,T]$. Om $p \in [1,\infty[$ är fixt låter vi $\mathcal{L}^p[0,T]$ beteckna klassen av alla $f \in \mathcal{L}^p_{loc}[0,T]$ sådana att

$$E\left[\int_0^T \mid f(t) \mid^p dt\right] < \infty.$$

En stokastisk process $(f(t))_{0\leq t\leq T}$ sägs vara en trapprocess om det existerar en indelning

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = T$$

sådan att

$$f(t) = f(t_k),\ t_k \leq t < t_{k+1},\ k = 0,...,n-1.$$

Föjande approximationssatser ges här utan bevis (för bevis se t ex $[FR]$).

Sats 1. (Approximationssats för $\mathcal{L}^p_{loc}[0,T]$, $p \in [1,\infty[$) *Antag $f \in \mathcal{L}^p_{loc}[0,T]$, där $p \in [1,\infty[$.*

a) Det finns $f_n \in \mathcal{L}^p_{loc}[0,T]$, $n \in \mathbf{N}$, med kontinuerliga trajektorier så att

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \mid f_n(t) - f(t) \mid^p dt = 0 \text{ n.s.}$$

b) Det finns trapprocesser $f_n \in \mathcal{L}^p_{loc}[0,T]$, $n \in \mathbf{N}$, så att

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \mid f_n(t) - f(t) \mid^p dt = 0 \text{ n.s.}$$

Sats 2. (Approximationssats för $\mathcal{L}^2[0,T]$) *Antag $f \in \mathcal{L}^2[0,T]$.*

a) Det finns $f_n \in \mathcal{L}^2[0,T]$, $n \in \mathbf{N}$, med kontinuerliga trajektorier så att

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\int_0^T (f_n(t) - f(t))^2 dt\right] = 0.$$

b) Det finns trapprocesser $f_n \in \mathcal{L}^2[0,T]$, $n \in \mathbf{N}$, *så att*

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\int_0^T (f_n(t) - f(t))^2 dt\right] = 0.$$

Antag nu att $f \in \mathcal{L}^2_{loc}[0,T]$ är en trapprocess sådan att

$$f(t) = f(t_k),\ t_k \le t < t_{k+1},\ k = 0, ..., n-1$$

för en viss indelning

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = T.$$

Vi definierar i detta fall den stokastiska variabeln

$$\int_0^T f(t) dW(t)$$

genom att sätta

$$\int_0^T f(t) dW(t) = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)(W(t_{k+1}) - W(t_k)).$$

Definitionen är oberoende av val av indelning av intervallet $[0,T]$.

Låt oss nu dessutom antaga att trapprocessen $f \in \mathcal{L}^2[0,T]$. Eftersom

$$\int_0^T f^2(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} f^2(t_k)(t_{k+1} - t_k)$$

så följer att

$$\infty > E\left[\int_0^T f^2(t) dt\right] = \sum_{k=0}^{n-1} E\left[f^2(t_k)\right](t_{k+1} - t_k)$$

varför

$$f(t_k) \in L^2(P),\ k = 0, ..., n-1.$$

Alltså är

$$E\left[\int_0^T f(t) dW(t)\right] = \sum_{k=0}^{n-1} E\left[f(t_k)(W(t_{k+1}) - W(t_k))\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} E\left[f(t_k)\right] E\left[(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right] = 0.$$

Eftersom de stokastiska variablerna

$$f(t_k)(W(t_{k+1}) - W(t_k)),\ k = 0, ..., n-1$$

är ortogonala i $L^2(P)$ så ger Pythagoras sats också att

$$E\left[\left(\int_0^T f(t)dW(t)\right)^2\right] = \sum_{k=0}^{n-1} E\left[f^2(t_k)(W(t_{k+1}) - W(t_k))^2\right]$$

$$= \sum_{=k=0}^{n-1} E\left[f^2(t_k)\right] E\left[(W(t_{k+1}) - W(t_k))^2\right] = \sum_{k=0}^{n-1} E\left[f^2(t_k)\right](t_{k+1} - t_k)$$

$$= E\left[\int_0^T f^2(t)dt\right].$$

Vi skall nu definiera den stokastiska integralen

$$\int_0^T f(t)dW(t)$$

för varje $f \in \mathcal{L}^2[0,T]$. Enligt sats 2 finns trapprocesser $f_n \in \mathcal{L}^2[0,T]$, $n \in \mathbf{N}$, så att

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\int_0^T (f_n(t) - f(t))^2 dt\right] = 0.$$

Men då är

$$E\left[\left(\int_0^T f_m(t)dW(t) - \int_0^T f_n(t)dW(t)\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\int_0^T (f_m(t) - f_n(t))dW(t)\right)^2\right]$$

$$= E\left[\int_0^T (f_m(t) - f_n(t))^2 dt\right]$$

varför följden

$$\left(\int_0^T f_n(t)dW(t)\right)_{n\in\mathbf{N}}$$

är en Cauchyföljd i $L^2(P)$. Följden är därför konvergent och man visar lätt att gränsvärdet är oberoende av valet av sekvens $f_n \in \mathcal{L}^2[0,T]$, $n \in \mathbf{N}$, i konstruktionen ovan. Vi i betecknar gränsvärdet med

$$\int_0^T f(t)dW(t)$$

och det följer att

$$E\left[\int_0^T f(t)dW(t)\right] = 0$$

och

$$E\left[\left(\int_0^T f(t)dW(t)\right)^2\right] = E\left[\int_0^T f^2(t)dt\right].$$

Vi har nu definierat den stokastiska integralen för integrander i klassen $\mathcal{L}^2[0,T]$. För att utsräcka definitionen till integrander i klassen $\mathcal{L}^2_{loc}[0,T]$ behövs ett lemma som vi ger utan bevis.

Lemma 1. *Antag $f \in \mathcal{L}^2_{loc}[0,T]$ är en trapprocess och låt $\varepsilon > 0$ och $N > 0$ vara givna. Då gäller att*

$$P\left[\mid \int_0^T f(t)dW(t) \mid > \varepsilon\right] \leq P\left[\int_0^T f^2(t)dt > N\right] + \frac{N}{\varepsilon^2}.$$

Vi skall nu definiera den stokastiska integralen

$$\int_0^T f(t)dW(t)$$

för varje $f \in \mathcal{L}^2_{loc}[0,T]$. Enligt sats 1 finns trapprocesser $f_n \in \mathcal{L}^2_{loc}[0,T]$, $n \in \mathbf{N}$, så att

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T (f_n(t) - f(t))^2 dt = 0$$

i sannolikhet. Lemma 1 medför nu att

$$P\left[\mid \int_0^T f_m(t)dW(t) - \int_0^T f_n(t)dW(t) \mid > \varepsilon\right]$$

$$\leq P\left[\int_0^T (f_m(t) - f_n(t))^2 dt > N\right] + \frac{N}{\varepsilon^2}$$

för varje $\varepsilon > 0$ och $N > 0$ och det följer att

$$\lim_{m,n\to\infty} P\left[\mid \int_0^T f_m(t)dW(t) - \int_0^T f_n(t)dW(t) \mid > \varepsilon\right] = 0.$$

Sekvensen

$$(\int_0^T f_n(t)dW(t))_{n\in\mathbf{N}}$$

konvergerar således i sannolikhet. Man visar lätt att gränsvärdet är oberoende av valet av sekvens $f_n \in \mathcal{L}^2_{loc}[0,T]$, $n \in \mathbf{N}$, i konstruktionen ovan och vi betecknar gränsvärdet med

$$\int_0^T f(t)dW(t).$$

Om $f \in \mathcal{L}^2_{loc}\ [0,T]$ är en trapprocess så sammanfaller denna definition av den stokastiska integralen med den tidigare givna. Detta är också fallet om $f \in \mathcal{L}^2\ [0,T]$ och i detta fall gäller som vi redan sagt att

$$E\left[\int_0^T f(t)dW(t)\right] = 0$$

och

$$E\left[\left(\int_0^T f(t)dW(t)\right)^2\right] = E\left[\int_0^T f^2(t)dt\right].$$

Dessa relationer gäller ej i allmänhet under det svagare villkoret $f \in \mathcal{L}^2_{loc}$ $[0,T]$.

Vi ger följande approximationssats utan bevis.

Sats 3. (Approximationssats för stokastiska integraler) *Antag* $f \in \mathcal{L}^2_{loc}[0,T]$ *och låt* $f_n \in \mathcal{L}^2_{loc}[0,T]$, $n \in \mathbf{N}$, *uppfylla*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T (f_n(t) - f(t))^2 dt = 0 \text{ n.s.}$$

Då gäller att

$$\int_0^T f_n(t)dW(t) \to \int_0^T f(t)dW(t)$$

i sannolikhet då $n \to \infty$.

Vi har också följande konvergenssats.

Sats 4. *Antag* $f \in \mathcal{L}^2_{loc}[0,T]$ *och antag* f *har kontinuerliga trajektorier. Låt vidare för varje positivt heltal* n

$$\Delta_n : 0 = t_{n,0} < t_{n,1} < ... < t_{n,m_n-1} < t_{n,m_n} = T$$

vara en indelning av intervallet $[0,T]$ *sådan att indelningens finhet går mot* 0 *då* $n \to \infty$. *Då gäller att*

$$\sum_{k=0}^{m_n-1} f(t_{n,k})(W(t_{n,k+1}) - W(t_{n,k})) \to \int_0^T f(t)dW(t)$$

i sannolikhet då $n \to \infty$.

Bevis. Vi definierar trapprocesser $f_n \in \mathcal{L}^2_{loc}[0,T]$, $n \in \mathbf{N}$, så att

$$f_n(t) = f(t_{n,k}) \text{ i intervallet } t_{n,k} \le t < t_{n,k+1},\ 0 \le k \le m_n - 1.$$

Då gäller att $f_n(t) \to f(t)$ likformigt i $t \in [0,T]$ då $n \to \infty$ dvs sekvensen $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergerar mot f i Banachrummet $C[0,T]$ med normen

$$\|x\| = \max_{0 \le t \le T} \mid x(t) \mid .$$

Speciellt följer att

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T (f_n(t) - f(t))^2 dt = 0$$

och definitionen av den stokastiska integralen

$$\int_0^T f(t)dW(t)$$

(eller sats 3) visar att

$$\int_0^T f_n(t)dW(t) \to \int_0^T f(t)dW(t)$$

i sannolikhet då $n \to \infty$. Resultatet följer nu av att

$$\int_0^T f_n(t)dW(t) = \sum_{k=0}^{m_n-1} f(t_{n,k})(W(t_{n,k+1}) - W(t_{n,k})).$$

[]

Det inledande resonemanget i detta kapitel och sats 4 visar nu att

$$\int_0^T W(t)dW(t) = \frac{1}{2}W^2(T) - \frac{1}{2}T.$$

En stokastisk process $(X(t))_{0\leq t\leq T}$ sägs vara en martingal med avseende på filtrationen $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ om

(a) $\sigma(X(t)) \subseteq \mathcal{F}_t$

(b) $X(t) \in L^1(P)$

(c) $E\left[X(t) \mid \mathcal{F}_s\right] = X(s)$ så snart $s \leq t$.

För varje trappprocess $f \in \mathcal{L}^2\left[0,T\right]$ så är processen

$$\int_0^t f(u)dW(u),\ t \in [0,T]$$

en martingal med avseende på filtrationen $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$. Genom approximation med trapprocesser följer att denna egenskap gäller för varje $f \in \mathcal{L}^2\left[0,T\right]$. Processerna i klassen $\mathcal{L}^2_{loc}\left[0,T\right]$ saknar i allmänhet integrabilitetsegenskaper och kan inte förväntas ha martingalegenskaper. Emellertid gäller följande sats som vi ger utan bevis (för bevis se $[FR]$).

Sats 5. *Antag $f \in \mathcal{L}^2_{loc}\left[0,T\right]$. Då gäller att processen*

$$\int_0^t f(u)dW(u),\, t \in [0,T]$$

har en kontinuerlig version.

Fr o m nu antager vi att alla processer av typen

$$\int_0^t f(u)dW(u),\ t \in [0,T]$$

där $f \in \mathcal{L}^2_{loc}[0,T]$ är givna i en version med kontinuerliga trajektorier n.s. Om $f \in \mathcal{L}^2_{loc}[0,T]$ definieras

$$\int_{t_1}^{t_2} f(u)dW(u) = \int_0^{t_2} f(u)dW(u) - \int_0^{t_1} f(u)dW(u),\ 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T.$$

Antag att $a \in \mathcal{L}^1_{loc}[0,T]$ och $b \in \mathcal{L}^2_{loc}[0,T]$. Om en stokastisk process $(X(t))_{t\in[0,T]}$ uppfyller

$$X(t) - X(0) = \int_0^t a(u)dt + \int_0^t b(u)dW(u),\ 0 \leq t \leq T$$

skriver vi

$$dX(t) = a(t)dt + b(t)dW(t)$$

och $dX(t)$ kallas för en stokastisk differential. Om dessutom $c \in \mathcal{L}^\infty_{loc}[0,T]$ definieras

$$c(t)dX(t) = c(t)a(t)dt + c(t)b(t)dW(t).$$

Exempelvis ger formeln

$$\int_0^t W(u)dW(u) = \frac{1}{2}W^2(t) - \frac{1}{2}t,\ 0 \leq t \leq T$$

att

$$d(W^2(t)) = 2W(t)dW(t) + dt$$

Redan i kapitel 1 visades den mindre överraskande formeln

$$d(\varphi(t)W(t)) = \varphi'(t)W(t)dt + \varphi(t)dW(t)$$

då funktionen $\varphi(t)$, $0 \leq t \leq T$ är kontinuerligt deriverbar.

Vi skall nu behandla en ganska allmän produktregel för differentialer inom stokastisk kalkyl. Antag $a_k \in \mathcal{L}^1_{loc}[0,T]$ och $b_k \in \mathcal{L}^2_{loc}[0,T]$, $k = 1, 2$, och låt

$$dX_k(t) = a_k(t)dt + b_k(t)dW(t),\ k = 1, 2.$$

Vi påstår att följande produktregel gäller, nämligen

$$d(X_1(t)X_2(t)) = X_1(t)dX_2(t) + X_2(t)dX_1(t) + b_1(t)b_2(t)dt$$

dvs att det för fixa $t_1, t_2 \in [0,T]$ som uppfyller $t_1 \leq t_2$ gäller att

$$X_1(t_2)X_2(t_2) - X_1(t_1)X_2(t_1)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} X_1(t)a_2(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} X_1(t)b_2(t)dW(t)$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} X_2(t)a_1(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} X_2(t)b_1(t)dW(t) + \int_{t_1}^{t_2} b_1(t)b_2(t)dt.$$

Om a_1, a_2, b_1 och b_2 är konstanta i intervallet $[t_1, t_2]$ (dvs $\mathcal{F}_{t_1}$-mätbara) följer denna formel av en direkt kalkyl. Genom addition över olika intervall följer att formeln ovan är sann då $a_k \in \mathcal{L}^1_{loc}[0,T]$ och $b_k \in \mathcal{L}^2_{loc}[0,T]$, $k = 1,2$, är trapprocesser. Det allmänna fallet följer nu genom approximation (för detaljer se $[FR]$).

Antag att $a \in \mathcal{L}^1_{loc}[0,T]$, $b \in \mathcal{L}^2_{loc}[0,T]$ och låt

$$dX(t) = a(t)dt + b(t)dW(t).$$

Vi påstår att

$$dX^n(t) = nX^{n-1}(t)dX(t) + \frac{n(n-1)}{2}X^{n-2}(t)b^2(t)dt,\ n = 2,3,\dots .$$

Fallet $n = 2$ är redan klart. Antag nu att formeln är sann för ett fixt $n \geq 2$. Vi får då att

$$dX^{n+1}(t) = d(X(t)X^n(t))$$

$$= X(t)dX^n(t) + X^n(t)dX(t) + nX^{n-1}(t)b^2(t)dt$$

$$= nX^n(t)dX(t) + \frac{n(n-1)}{2}X^{n-1}(t)b^2(t)dt$$

$$+X^n(t)dX(t) + nX^{n-1}(t)b^2(t)dt$$

$$= (n+1)X^n(t)dX(t) + \frac{(n+1)n}{2}X^{n-1}(t)b^2(t)dt$$

och formeln ovan följer med hjälp av induktion. Om q är ett polynom av en reell variabel drar vi därför slutsatsen att

$$dq(X(t)) = q'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}q''(X(t))b^2(t)dt.$$

Vi definierar nu

$$(dX(t))^2 = b^2(t)dt.$$

Notera speciellt att

$$(dt)^2 = 0dt = 0$$

och

$$(dW(t))^2 = dt.$$

Eftersom rent formellt

$$(dX(t))^2 = (a(t)dt + b(t)dW(t))^2 =$$

$$a^2(t)(dt)^2 + a(t)b(t)dtdW(t) + a(t)b(t)dW(t)dt + b^2(t)(dW(t))^2$$

är det naturligt att också definiera

$$dtdW(t) = dW(t)dt = 0.$$

Med dessa konventioner följer att

$$dq(X(t)) = q'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}q''(X(t))(dX(t))^2.$$

Om φ är kontinuerligt deriverbar ger vidare produktregeln för stokastiska differentialer att

$$d(\varphi(t)q(X(t))) = \varphi'(t)q(X(t))dt + \varphi(t)dq(X(t)) =$$

$$\varphi'(t)q(X(t))dt + \varphi(t)q'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}\varphi(t)q''(X(t))(dX(t))^2.$$

Vi inför nu $u(t,x) = \varphi(t)q(x)$ och får

$$du(t,X(t)) = u'_t(t,X(t))dt + u'_x(t,X(t))dX(t) + \frac{1}{2}u''_{xx}(t,X(t))(dX(t))^2.$$

Genom superposition inses först att detta resultat gäller om $u(t,x)$ är ett polynom av två reella variabler och därefter genom approximation att denna formel också gäller om $u(t,x)$ är en gång kontinuerligt deriverbar i $t \in [0,T]$ och två gånger kontinuerligt deriverbar i $x \in \mathbf{R}^2$ (för detaljer se $[FR]$). Detta viktiga resultat går under namnet Itôs lemma.

Sats 6. (Itôs lemma) *Antag* $a \in \mathcal{L}^1_{loc}[0,T]$, $b \in \mathcal{L}^2_{loc}[0,T]$ *och låt*

$$dX(t) = a(t)dt + b(t)dW(t).$$

Antag också att funktionen $u(t,x)$ *är en gång kontinuerligt deriverbar i* $t \in [0,T]$ *och två gånger kontinuerligt deriverbar i* $x \in \mathbf{R}^2$. *Då gäller*

$$du(t,X(t)) = u'_t(t,X(t))dt + u'_x(t,X(t))dX(t) + \frac{1}{2}u''_{xx}(t,X(t))(dX(t))^2.$$

Exempel 1. Antag $a_k \in \mathcal{L}^1_{loc}[0,T]$, $b_k \in \mathcal{L}^2_{loc}[0,T]$, $k = 1, 2$, och

$$dX(t) = a_k(t)dt + b_k(t)dW(t), \ k = 1, 2.$$

Vi påstår att $a_1 = a_2$ och $b_1 = b_2$ som element i $\mathcal{L}^1_{loc}[0,T]$ resp. $\mathcal{L}^2_{loc}[0,T]$.

Förutsättningarna innebär att

$$X(t) - X(0) = \int_0^t a_k(u)du + \int_0^t b_k(u)dW(u), \ 0 \le t \le T$$

med sannolikheten ett för $k = 1$ och $k = 2$. Genom att definiera $a = a_1 - a_2$ och $b = b_1 - b_2$ följer att processen

$$Y(t) = \int_0^t a(u)du + \int_0^t b(u)dW(u), \ 0 \le t \le T$$

har samplefunktioner som är identiskt noll med sannolikheten ett. Nu är

$$dY^2(t) = 2Y(t)dY(t) + (dY(t))^2, \ 0 \le t \le T$$

dvs

$$Y^2(t) - Y^2(0) = \int_0^t (2Y(u)a(u)) + b^2(u))du + \int_0^t 2Y(u)b(u)dW(u), \ 0 \le t \le T.$$

Alltså gäller att

$$0 = \int_0^t b^2(u)du, \ 0 \le t \le T$$

med sannolikheten ett dvs $b = 0$. Eftersom

$$Y(t) = \int_0^t a(u)du, \ 0 \le t \le T$$

följer av Lebesgues version av integralkalkylens huvudsats att processen $a = (a(t))_{0\leq t\leq T} = 0$ har samplefunktioner som är 0 n.s. $\left[m_{[0,T]}\right]$ med sannolikheten ett dvs $a = 0$. []

Korollarium 1. *Ett aktiepris $S(t)$, $t \geq 0$, beskriver en geometrisk Brownsk rörelse med exponentiell drift. Aktiens volatilitet är lika med $\sigma > 0$ och*

$$E\left[S(t)\right] = S(0)e^{\mu t},\ t \geq 0.$$

Under dessa förutsättningar är

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t).$$

Speciellt gäller att den Brownska exponentialmartingalen

$$M_\sigma(t) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma W(t)},\ t \geq 0$$

uppfyller ekvationen

$$dM_\sigma(t) = \sigma M_\sigma(t)dW(t).$$

Här definieras

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \frac{1}{S(t)}dS(t).$$

Bevis. Skriv

$$S(t) = S(0)e^{X(t)}$$

där

$$X(t) = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t).$$

Itôs lemma ger att

$$dS(t) = S(t)dX(t) + \frac{1}{2}S(t)(dX(t))^2$$

$$= S(t)\left\{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dW(t) + \frac{\sigma^2}{2}dt\right\} = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t))$$

och korollarium 1 är fullständigt bevisat. []

Exempel 2. Vi skall här ge uppmärksamhet åt några viktiga samband mellan paraboliska differentialekvationer och stokastiska differentialekvationer som växer fram genom att tillämpa Itôs lemma.

Betrakta differentialoperatorn

$$\mathcal{A}u(t,x) = \frac{\sigma^2(t,x)}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + b(t,x)u(t,x).$$

Antag $T > 0$ och betrakta den paraboliska differentialekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}u(t,x) = 0,\ t < T,\ x \in \mathbf{R}$$

och den stokastiska differentialekvationen

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t),\ 0 \leq t \leq T.$$

Under lämpliga regularitetsvillkor gäller att att funktionen

$$u(t,x) = E\left[f(X(T))e^{\int_t^T b(s,X(s))ds} \mid X(t) = x\right]$$

är en lösning till den paraboliska differentialekvationen ovan med slutvillkoret

$$u_{|t=T} = f.$$

Detta märkliga samband kallas Feynman-Kac formel. Att bevisa denna formel är naturligtvis väldigt svårt och skulle leda oss långt in i teorin för paraboliska och stokastiska differentialekvationer och teorin för lokala martingaler. En formell kalkyl gör dock formeln trolig.

Antag funktionen $u(t,x)$ löser den paraboliska differentialekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}u(t,x) = 0,\ t < T,\ x \in \mathbf{R}$$

och

$$u_{u|t=T} = f.$$

Det gäller att

$$e^{-\int_0^t b(s,X(s))ds} d\left\{u(t,X(t))e^{\int_0^t b(s,X(s))ds}\right\}$$

$$\begin{aligned}&= u_t'(t,X(t))dt + u_x'(t,X(t))dX(t) + \frac{\sigma^2(t,X(t))}{2}u''(t,X(t))dt\\ &\qquad +u(t,X(t))b(X(t))dt\\ &= (u_t'(t,X(t)) + \mathcal{A}u(t,X(t)))dt + \sigma(t,X(t))u_x'(t,X(t))dW(t)\\ &= \sigma(t,X(t))u_x'(t,X(t))dW(t).\end{aligned}$$

Härav följer att

$$u(T,X(T))e^{\int_0^T b(s,X(s))ds} - u(0,X(0))$$
$$= \int_0^T \sigma(t,X(t))u_x'(t,X(t))e^{\int_0^t b(s,X(s))ds}dW(t).$$

Antag nu $X(0) = x$. Om (och detta är ett viktigt om)

$$(\sigma(t,X(t))u_x'(t,X(t))e^{\int_0^t b(s,X(s))ds})_{0\le t\le T} \in \mathcal{L}^2\,[0,T]$$

gäller att dess stokastiska integral över intervallet $[0,T]$ har förväntan 0 och det följer att

$$E\left[u(T,X(T))e^{\int_0^T b(s,X(s))ds} - u(0,x) \mid X(0) = x\right] = 0$$

dvs

$$u(0,x) = E\left[f(X(T))e^{\int_0^T b(s,X(u))du} \mid X(0) = x\right].$$

På samma sätt följer att

$$u(t,x) = E\left[f(X(T))e^{\int_t^T b(s,X(s))du} \mid X(t) = x\right],\ t < T.$$

Denna funktion kallas Feynman-Kac-lösningen till det aktuella slutvärdesproblemet. Ibland nöjer vi oss med att säga "lösningen" istället för det mer precisa "Feynman-Kac-lösningen".

Fallet då a, b och $\sigma > 0$ är reella konstanter diskuterades i kursen Optioner och matematik. []

Vi har ovan sett att aktiepriset

$$S(t) = S(0)e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W(t)},\ 0 \le t \le T$$

i Bachelier-Samuelsons modell löser den stokastiska differentialekvationen

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)),\ 0 \le t \le T$$

med begynnelsevärdet $S(0)$. Det är naturligt att fråga sig om lösningen är unik och under vilka tillräckliga villkor allmännare stokastiska differentialekvationer har unik lösning. Låt oss därför betrakta den stokastiska differentialekvationen

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t),\ 0 \le t \le T$$

med begynnelsevärdet $x_0 \in \mathbf{R}$ eller ekvivalent

$$X(t) = x_0 + \int_0^t a(s, X(s))ds + \int_0^t b(s, X(s))dW(s),\ 0 \le t \le T.$$

Här antags att

$$a : [0, T] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

och

$$b : [0, T] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

är kontinuerliga funktioner.

Sats 7. *Antag det finns en konstant K sådan att*

$$\mid a(t,x) - a(t,y) \mid \le K \mid x - y \mid,\ 0 \le t \le T,\ x, y \in \mathbf{R},$$

$$\mid b(t,x) - b(t,y) \mid \le K \mid x - y \mid,\ 0 \le t \le T,\ x, y \in \mathbf{R},$$

$$\mid a(t,x) \mid \le K(1+ \mid x \mid), 0 \le t \le T,\ x \in \mathbf{R}$$

och

$$\mid b(t,x) \mid \le K(1+ \mid x \mid),\ 0 \le t \le T,\ x \in \mathbf{R}.$$

Då finns en lösning $(X(t))_{0 \le t \le T}$ till den stokastiska differentialekvationen

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t),\ 0 \le t \le T$$

med begynnelsevärdet $x_0 \in \mathbf{R}$ sådan att lösningen har kontinuerliga trajektorier med sannolikheten ett och

$$\sup_{0 \le t \le T} E\left[X^2(t)\right] < \infty.$$

Om $(Y(t))_{0\le t\le T}$ *är en annan sådan lösning så gäller att*

$$P\left[X(t) = Y(t), \textit{alla } 0 \le t \le T\right] = 1.$$

Vi nöjer oss med att bevisa entydigheten.

Bevis för entydigheten. Antag att $(X(t))_{0\le t\le T}$ och $(Y(t))_{0\le t\le T}$ är lösningar och bilda

$$X(t) - Y(t) = \int_0^t (a(s, X(s)) - a(s, Y(s)))ds$$

$$+ \int_0^t (b(s, X(s)) - b(s, Y(s)))dW(s).$$

Vi utnyttjar nu olikheten

$$(\alpha + \beta)^2 \le 2(\alpha^2 + \beta^2),\ \ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

och får

$$E\left[(X(t) - Y(t))^2\right] \le 2E\left[(\int_0^t (a(s, X(s)) - a(s, Y(s)))ds)^2\right]$$

$$+2E\left[(\int_0^t (b(s, X(s)) - b(s, Y(s)))dW(s))^2\right].$$

Cauchy-Schwarz olikhet ger att

$$E\left[(\int_0^t (a(s, X(s)) - a(s, Y(s)))ds)^2\right] \le tE\left[\int_0^t (a(s, X(s)) - a(s, Y(s)))^2 ds\right].$$

Vi använder nu olikheten

$$(a(s, X(s)) - a(s, Y(s)))^2 \le K^2 (X(s) - Y(s))^2$$

och det följer att

$$E\left[(\int_0^t (a(s, X(s)) - a(s, Y(s)))ds)^2\right] \le tK^2 \int_0^t E\left[(X(s)) - Y(s))^2\right] ds.$$

Genom att utnyttja olikheten

$$(b(s,X(s)) - b(s,Y(s)))^2 \le K^2(X(s)-Y(s))^2$$

följer också att

$$E\left[\int_0^t (b(s,X(s)) - b(s,Y(s)))^2 ds\right] \le K^2 \int_0^t E\left[(X(s)-Y(s))^2\right] ds$$

$$\le 2K^2 t(\sup_{0\le t\le T} E\left[X^2(t)\right] + \sup_{0\le t\le T} E\left[Y^2(t)\right]) < \infty.$$

Vi har alltså visat att

$$(b(s,X(s)) - b(s,Y(s)))_{0\le t\le T} \in \mathcal{L}^2\left[0,t\right]$$

och det följer att

$$E\left[(\int_0^t (b(s,X(s)) - b(s,Y(s)))dW(s))^2\right] = E\left[\int_0^t (b(s,X(s)) - b(s,Y(s)))^2 ds\right]$$

$$\le K^2 \int_0^t E\left[(X(s)-Y(s))^2\right] ds.$$

Om vi definierar $C = 2K^2 \max(T,1)$ så följer nu att

$$E\left[(X(t)-Y(t))^2\right] \le C\int_0^t E\left[(X(s)-Y(s))^2\right] ds.$$

Funktionen

$$f(t) = E\left[(X(t)-Y(t))^2\right],\ 0\le t\le T$$

uppfyller alltså olikheten

$$f(t) \le C\int_0^t f(s)ds,\ 0\le t\le T$$

Låt

$$M = \sup_{0\le s\le T} f(s).$$

Genom induktion erhålls att

$$f(t) \le \frac{MC^n}{n!}t^n,\ n\in\mathbf{N}$$

och därmed är $f=0$.

Vi har nu visat att

$$P[X(t) = Y(t)] = 1, \text{ alla } 0 \le t \le T.$$

Alltså gäller att

$$P[X(t) = Y(t) \text{ alla rationella } t \in [0,T]] = 1.$$

Eftersom processerna $(X(t))_{0\le t\le T}$ och $(Y(t))_{0\le t\le T}$ båda har kontinerliga trajektorier med sannolikheten ett så följer satsen. []

Exempel 3. Antag α, μ och σ är reella parametrar. Ekvationen

$$dX(t) = (\alpha + \mu X(t))dt + \sigma X(t)dW(t), \; t \ge 0$$

med begynnelsevillkoret $X(0) = x_0$ är enligt sats 7 lösbar. I fallet $\alpha = 0$ ch $x_0 = 1$ har vi lösningen

$$U(t) = e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)}.$$

Sätt därför

$$Y(t) = \frac{X(t)}{U(t)} = X(t)V(t)$$

där

$$V(t) = e^{(-\mu + \frac{\sigma^2}{2})t - \sigma W(t)}.$$

Notera att

$$dV(t) = V(t)(-\mu + \sigma^2)dt - \sigma dW(t))$$

och produktregeln ger

$$d(X(t)V(t)) = V(t)dX(t) + X(t)dV(t) + dX(t)dV(t)$$

$$= V(t)\{(\alpha + \mu X(t))dt + \sigma X(t)dW(t)\} + X(t)V(t)\left\{(-\mu + \sigma^2)dt - \sigma dW(t)\right\}$$

$$-\sigma^2 X(t)V(t)dt = \alpha V(t)dt.$$

Härav följer att

$$X(t)V(t) = x_0 + \alpha \int_0^t V(u)du$$

dvs

$$X(t) = e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)}(x_0 + \alpha \int_0^t e^{(-\mu + \frac{\sigma^2}{2})u - \sigma W(u)} du).$$

Exempel 4. Låt $s_0, \alpha > 0$ vara positiva parametrar och μ och σ reella parametrar. Betrakta den stokastiska differentialekvationen

$$dS(t) = S(t)(\mu - \alpha S(t))dt + \sigma S(t) dW(t), \; t \geq 0$$

med begynnelsevärdet $S(0) = s_0$. Ekvationen kallas ofta den stokastiska Verhulstekvationen (fallet $\sigma = 0$ är Verhulst ekvation). Sats 7 garanterar inte att ekvationen är lösbar. Sätt

$$X(t) = \frac{1}{S(t)}$$

så att

$$\begin{aligned} dX(t) &= -\frac{1}{S^2(t)} \{S(t)(\mu - \alpha S(t))dt + \sigma S(t) dW(t)\} + \frac{1}{S^3(t)} (dS(t))^2 \\ &= -(\mu X(t) - \alpha)dt - \sigma X(t) dW(t) + \sigma^2 X(t) dt \\ &\quad (\alpha + (\sigma^2 - \mu) X(t))dt - \sigma X(t) dW(t). \end{aligned}$$

Enligt föregående exempel är

$$X(t) = e^{(\frac{\sigma^2}{2} - \mu)t - \sigma W(t)}(X(0) + \alpha \int_0^t e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})u + \sigma W(u)} du)$$

och vi får

$$S(t) = \frac{e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)}}{X(0) + \alpha \int_0^t e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})u + \sigma W(u)} du}$$

dvs

$$S(t) = \frac{s_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)}}{1 + \alpha s_0 \int_0^t e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})u + \sigma W(u)} du}.$$

Exempel 5. Antag x_0 och α är reella parametrar. Låt $h(x)$ vara en primitiv till funktionen $\frac{1}{b(x)}$ och betrakta den stokastiska differentialekvationen

$$dX(t) = \left\{\alpha b(X(t)) + \frac{1}{2} b(X(t)) b'(X(t))\right\} dt + b(X(t) dW(t), \; t \geq 0$$

med begynnelsevillkoret $X(0) = x_0$. Under lämpliga villkor på $b(x)$ garanterar sats 7 en unik lösning. För att bestämma denna beräknar vi

$$dh(X(t)) = h'(X(t)dX(t) + \frac{1}{2}h''(X(t))(dX(t))^2$$

$$= \frac{1}{b(X(t))}dX(t) - \frac{1}{2}\frac{b'(X(t))}{b^2(X(t))}b^2(X(t))dt$$

$$= \frac{1}{b(X(t))}(dX(t) - \frac{1}{2}b(X(t))b'(X(t))dt)$$

$$= \frac{1}{b(X(t))}(\alpha b(X(t))dt + b(X(t)dW(t))$$

$$= \alpha dt + dW(t).$$

Härav följer att

$$h(X(t)) = h(x_0) + \alpha t + W(t).$$

Exempel 6. Antag x_0 och α är reella parametrar. Låt $h(x)$ vara en primitiv till funktionen $\frac{1}{b(x)}$ och betrakta den stokastiska differentialekvationen

$$dX(t) = \left\{\alpha b(X(t))h(X(t)) + \frac{1}{2}b(X(t))b'(X(t))\right\} dt + b(X(t)dW(t), \ t \geq 0$$

med begynnelsevillkoret $X(0) = x_0$. Under lämpliga villkor på $b(x)$ garanterar sats 7 en unik lösning. För att bestämma denna beräknar vi

$$dh(X(t)) = h'(X(t)dX(t) + \frac{1}{2}h''(X(t))(dX(t))^2$$

$$= \frac{1}{b(X(t))}dX(t) - \frac{1}{2}\frac{b'(X(t))}{b^2(X(t))}b^2(X(t))dt$$

$$= \frac{1}{b(X(t))}(dX(t) - \frac{1}{2}b(X(t))b'(X(t))dt)$$

$$= \frac{1}{b(X(t))}(\alpha b(X(t))h(X(t))dt + b(X(t)dW(t))$$

$$= \alpha h(X(t))dt + dW(t).$$

Härav följer att

$$de^{-\alpha t}h(X(t)) = e^{-\alpha t}dW(t)$$

och vi får
$$h(X(t)) = e^{\alpha t}(h(x_0) + \int_0^t e^{-\alpha u} dW(u)).$$

Exempel 7. Antag vi numeriskt vill lösa den stokastiska differentialekvation
$$dX(t) = a(X(t))dt + b(X(t))dW(t), \ 0 \leq t \leq T$$
med begynnelsevärdet $x_0 \in \mathbf{R}$. Vi startar därför med en indelning
$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T.$$
Integralekvationen
$$X(t) = x_0 + \int_0^t a(X(s))ds + \int_0^t b(X(s))dW(t), \ 0 \leq t \leq T$$
är då ekvivalent med att
$$X(0) = x_0$$
och
$$X(t_k) = X(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} a(X(s))ds + \int_{t_{k-1}}^{t_k} b(X(s))dW(t), \ k = 1, ..., n.$$
Ett vanligt schema av Eulers typ erhålls genom att definiera
$$X^{(n)}(0) = x_0$$
och
$$X^{(n)}(t_k) = X^{(n)}(t_{k-1}) + a(X^{(n)}(t_{k-1}))\Delta t_k + b(X^{(n)}(t_{k-1}))\Delta W(t_k), \ k = 1, ..., n$$
där
$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, \ k = 1, ..., n$$
och
$$\Delta W(t_k) = W(t_k) - W(t_{k-1}), \ k = 1, ..., n.$$
Vi kan dock få en bättre approximation genom att studera termen
$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} b(X(s))dW(t)$$

noggrannare. Vi har att

$$db(X(s)) = b'(X(s))dX(s) + \frac{b^2(X(s))}{2}b''(X(s))ds$$

$$= (a(X(s))b'(X(s)) + \frac{b^2(X(s))}{2}b''(X(s)))ds + b(X(s)b'(X(s))dW(s).$$

Härav följer att

$$b(X(s)) = b(X(t_{k-1})$$
$$+ \int_{t_{k-1}}^{s} (a(X(u))b'(X(u)) + \frac{b^2(X(u))}{2}b''(X(u)))du$$
$$+ \int_{t_{k-1}}^{s} b(X(u)b'(X(u))dW(u).$$

Vi får nu

$$X(t_k) - X(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} a(X((s))ds + \int_{t_{k-1}}^{t_k} b(X(s))dW(t)$$

$$= a(X(t_{k-1})\Delta t_k + b(X(t_{k-1})\Delta W(t_k) + R_k$$

där

$$R_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\int_{t_{k-1}}^{s} b(X(s)b'(X(s))dW(s) \right] dW(s) + R'_k.$$

Vi approximerar nu

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\int_{t_{k-1}}^{s} b(X(s)b'(X(s))dW(s) \right] dW(s)$$

med

$$b(X(t_{k-1})b'(X(t_{k-1})) \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\int_{t_{k-1}}^{s} dW(s))dW(s)$$

där

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} (\int_{t_{k-1}}^{s} dW(s))dW(s) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} (W(s) - W(t_{k-1}))dW(s)$$

$$= \int_{t_{k-1}}^{t_k} W(s)dW(s) - W(t_{k-1})(W(t_k) - W(t_{k-1}))$$

$$= \frac{W^2(t_k) - t_k}{2} - \frac{W^2(t_{k-1}) - t_{k-1}}{2} - W(t_{k-1})(W(t_k) - W(t_{k-1}))$$

$$= \frac{1}{2}((\Delta W(t_k))^2 - \Delta t_k).$$

Om vi försummar termen R_k' får vi Milsteins schema

$$X^{(n)}(0) = x_0$$

och

$$X^{(n)}(t_k) = X^{(n)}(t_{k-1}) + a(X^{(n)}(t_{k-1}))\Delta t_k + b(X^{(n)}(t_{k-1}))\Delta W(t_k)$$
$$+\frac{1}{2}b(X^{(n)}(t_{k-1})b'(X^{(n)}(t_{k-1}))((\Delta W(t_k))^2 - \Delta t_k),\ k = 1, ..., n.$$

Det skulle föra oss för långt att här gå in på i vilken mening denna lösning approximerar en lösningen till den ursprungliga ekvationen i det fall sådan lösning finns. Den intresserade läsaren hänvisas till Kloedens och Platens bok $[KL]$. []

Övningar

1. Antag $0 \le t_0 \le a \le b \le T$ och sätt $f(t, \omega) = 1_{[a,b]} W(t_0, \omega)$, $0 \le t \le T$, $\omega \in \Omega$. Visa att f är progressivt mätbar.

2. Visa att funktionen $W(t, \omega)$, $0 \le t \le T$, $\omega \in \Omega$, är progressivt mätbar.

3. Antag $1 \le p < \infty$. Sätt

$$f(t, \omega) = e^{W^2(t,\omega)}, 0 \le t \le T,\ \omega \in \Omega.$$

   a) Visa att $f \in \mathcal{L}^p_{loc}[0, T]$. b) Visa att $f \in \mathcal{L}^p[0, T]$ om och endast om $T \le \frac{1}{2p}$.

4. Antag $f \in \mathcal{L}^1_{loc}[0, T]$. Visa att processen

$$X(t) = \int_0^t f(t, u)du,\ 0 \le t \le T$$

   är adapterad.

5. Beräkna $E[X^2]$ då

$$X = \int_0^T (\int_0^t \sin(u + t)dW(u))dW(t).$$

6. Antag $G \in N(0,1)$ och sätt

$$H_n(x,y) = E\left[(x + i\sqrt{y}G)^n\right], \; n \in \mathbf{N}$$

för godtyckliga $x \in \mathbf{R}$ och $y \geq 0$. Visa att $H_0(x,y) = 1$, $H_1(x,y) = x$, $H_2(x,y) = x^2 - y$, $H_3(x,y) = x^3 - 3xy$ och $H_4(x,y) = x^4 - 6x^2y + 3y^2$. Visa också att

$$\frac{\partial}{\partial x} H_n(x,y) = nH_{n-1}(x,y), \; n = 1, 2, ...$$

$$\frac{\partial}{\partial y} H_n(x,y) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} H_n(x,y) = 0, \; n = 2, 3, ...$$

och

$$e^{\alpha x - \frac{1}{2}\alpha^2 y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} H_n(x,y), \; \alpha \in \mathbf{R}.$$

7. Visa att

$$M_\sigma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^n}{n!} H_n(W(t), t), \; \sigma > 0.$$

8. Visa med hjälp av Itôs lemma att

$$H_n(W(t), t) = n \int_0^t H_{n-1}(W(s), s) dW(s), \; n = 1, 2, ... \, .$$

9. Antag x_0 är en reell konstant. Lös ekvationen

$$dX(t) = \frac{1}{2} X(t)dt + \sqrt{1 + X^2(t)} dW(t)), \; t \geq 0$$

med begynnelsevärdet $X(0) = x_0$.