8. $\Delta-$hedging

I detta kapitel skall vi härleda teoretiska optionspriser med hjälp av så kallad Δ-hedging, den troligen allra viktigaste matematiska metoden i finansteknik.

Vi börjar med Black-Scholes modell dvs vi har en värdepappersmodell med en aktie och en obligation. Aktiens prisprocess ges av ekvationen

$$S(t) = S(0)e^{\alpha t+\sigma W(t)},\ 0 \le t \le T$$

där $W = (W(t))_{0\le t\le T}$ är en normaliserad Wienerprocess i tidsintervallet $[0,T]$. Obligationens prisprocess ges av ekvationen

$$B(t) = B(0)e^{rt},\ 0 \le t \le T.$$

Här är $\alpha, \sigma, S(0), B(0)$ och r reella konstanter varav de fyra sista är positiva. Om $\mu = \alpha + \frac{\sigma^2}{2}$ så följer att

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)).$$

Antag nu att ett enkelt derivat av europeisk typ har slutdagen T och denna dag utbetalar beloppet $Y = g(S(T))$, där $g \in \mathcal{P}$. Vi skall härleda ett teoretiskt pris för derivatet vid tiden t och ansätter att priset är av typen $v(t, S(t))$. Bilda därför vid tidpunkten t en portfölj bestående av ett derivat och $-\Delta$ aktier. Dess värde är lika med

$$\Pi(t) = v(t, S(t)) - \Delta S(t).$$

Vi försöker därefter välja Δ så att portföljen lokalt avkastar lika mycket som ett annat värdepapper i modellen, nämligen obligationen. Detta innebär att

$$d\Pi(t) = r\Pi(t)dt = (\Pi(t)\frac{dB(t)}{B(t)}).$$

Med tanke på Itôs lemma betyder detta att

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,S(t))dt + \frac{\partial v}{\partial s}(t,S(t))dS(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(t,S(t))(dS(t))^2 - \Delta dS(t)$$

$$= r(v(t,S(t)) - \Delta S(t))dt$$

dvs

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,S(t))dt+\frac{\partial v}{\partial s}(t,S(t))dS(t)+\frac{\sigma^2 S^2(t)}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(t,S(t))dt-\Delta dS(t)$$
$$=r(v(t,S(t))-\Delta S(t))dt.$$

Härav följer att

$$\Delta=\frac{\partial v}{\partial s}(t,S(t))$$

och

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,S(t))+\frac{\sigma^2 s^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(t,S(t))+rS(t)\frac{\partial v}{\partial s}(t,S(t))-rv(t,S(t))=0.$$

Med dessa insikter i minnet definieras funktionen $v(t,s)$, $0\leq t\leq T$, $s>0$, som (den naturliga) lösningen till Black-Scholes differentialekvation

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,s)+\frac{\sigma^2 s^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(t,s)+rs\frac{\partial v}{\partial s}(t,s)-rv(t,s)=0$$

med slutvillkoret

$$v(T,s)=g(s).$$

Vidare definieras

$$h_S(t)=\frac{\partial v}{\partial s}(t,S(t))$$

och

$$h_B(t)=(v(t,S(t))-h_S(t)S(t))/B(t).$$

Då gäller att

$$v(t,S(t))=h_S(t)S(t)+h_B(t)B(t)$$

och

$$dv(t,S(t))=h_S(t)dS(t)+h_B(t)dB(t).$$

Optionsvärdet vid tiden t definieras lika med $v(t,S(t))$. Denna metod att bestämma optionspriser kallas Δ-hedging.

Symboliken och en jämförelse med diskreta värdespappersmodeller gör det frestande att kalla processen $(h_S(t),h_B(t))_{0\leq t\leq T}$ för en självfinansierande strategi. För att motivera begreppet väljs en indelning

$$0=t_0<t_1<...<t_n=T$$

av intervallet $[0,T]$ och vi antar att $h_S \in \mathcal{L}^2_{loc}[0,T]$ och $h_B \in \mathcal{L}^1_{loc}[0,T]$ är trapprocesser av följande typ:

$$h_S(t) = h_S(t_k),\ t_k \leq t < t_{k+1},\ k = 0, ..., n-1$$

och

$$h_B(t) = h_B(t_k),\ t_k \leq t < t_{k+1},\ k = 0, ..., n-1.$$

Vi definierar nu en värdeprocess

$$v(t) = h_S(t)S(t) + h_B(t)B(t)$$

för alla $0 \leq t \leq T$ och antar att

$$dv(t) = h_S(t)dS(t) + h_B(t)dB(t).$$

Notera att värdeprocessen $v(t),\ t \in [0,T]$, är kontinuerlig eftersom

$$v(t) = v(0) + \int_0^t h_S(u)dS(u) + \int_0^t h_B(u)dB(u),\ 0 \leq t \leq T.$$

Vi fixerar nu $k \in \{0, ..., n-2\}$. Av ekvationerna

$$v(t_{k+1}) = v(t_k) + h_S(t_k)(S(t_{k+1}) - S(t_k)) + h_B(t_k)(B(t_{k+1}) - B(t_k))$$

och

$$v(t_j) = h_S(t_j)S(t_j) + h_B(t_j)B(t_j),\ j = k, k+1$$

dras slutsatsen att

$$h_S(t_k)S(t_{k+1}) + h_B(t_k)B(t_{k+1})$$

$$= h_S(t_{k+1})S(t_{k+1}) + h_B(t_{k+1})B(t_{k+1})$$

dvs omplacering från $h_S(t_k)$ aktier och $h_B(t_k)$ obligationer till $h_S(t_{k+1})$ aktier och $h_B(t_{k+1})$ obligationer vid tiden t_{k+1} går kostnadsmässigt jämnt upp i den meningen att försäljningssumman är lika med köpesumman. Strategin kräver alltså endast en initial investering och vi kallar den därför självfinansierande. Begreppet självfinansierande portföljstategi har därför en tydlig innebörd då $h_S \in \mathcal{L}^2_{loc}[0,T]$ och $h_B \in \mathcal{L}^1_{loc}[0,T]$ är trapprocesser. Den strategi vi inledningsvis fick fram genom Δ-hedging kallas därför också fr o m nu för självfinansierande.

Vår inledande Δ-hedging leder alltså till en självfinansierande portföljstrategi som dessutom replikerar $Y = g(S(T))$ i den meningen att portföljvärdet vid tiden T är lika med Y. Låt oss nu gå tillbaka till Black-Scholes differentialekvation

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,s) + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(t,s) + rs\frac{\partial v}{\partial s}(t,s) - rv(t,s) = 0$$

med slutvillkoret.

$$v(T,s) = g(s).$$

Det finns en stokastisk representation av lösningen som kan beskrivas på följande sätt. Vi inför först det så kallade marknadspriset för risk

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

och definierar

$$W^\lambda(t) = W(t) + \lambda t,\ \ 0 \le t \le T.$$

Det följer att

$$dS(t) = S(t)(rdt + \sigma dW^\lambda(t)),\ \ 0 \le t \le T.$$

Cameron-Martins sats medför att det finns ett mått Q ekvivalent med P så att processen $(W^\lambda(t))_{0\le t\le T}$ är en normaliserad Brownsk rörelse. Detta ger oss (Feynman-Kac-)lösningen

$$v(t,s) = e^{-r\tau}E^Q\left[g(S(T)) \mid S(t) = s\right]$$

där $\tau = T - t$. Detta är i själva verket den gamla vanliga prisformeln för ett enkelt derivat av europeisk typ. Ekvationen

$$S(u) = S(0)e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})u+\sigma W^\lambda(u)}$$

ger nämligen att

$$S(T) = S(t)e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(W^\lambda(T)-W^\lambda(t))}$$

och

$$e^{-r\tau}E^Q\left[g(S(T)) \mid S(t) = s\right] = e^{-r\tau}E^Q\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(W^\lambda(T)-W^\lambda(t))})\right]$$

$$= e^{-r\tau}E^Q\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma W^\lambda(\tau)})\right] = e^{-r\tau}E\left[g(se^{r\tau}e^{-\frac{\sigma^2}{2}\tau+\sigma W(\tau)})\right].$$

Vi påminner om att sannolikhetsmåttet Q har den explicita formen

$$dQ = e^{-\lambda W(T)-\frac{1}{2}\lambda^2 T}dP$$

och kallas för martingalmåttet i Black-Scholes modell.

Vi skall närmast undersöka vad Δ-hedging kan ge för värdering av räntederivat om det förutsätts att den korta räntan beskrivs av en enkel diffusionsprocess och priset för en T-obligation är en deterministisk funktion av korta räntan. Vi repeterar att en så kallad T-obligation är en nollkupongsobligation med lösendag T och nominellt värde 1 dvs ett kontrakt som betalar innehavaren beloppet 1 vid tiden T och sedan är borta från marknaden. Vi betecknar obligationspriset vid tiden t med $p(t,T)$ och skriver

$$p(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)}.$$

Den korta räntan $r(t)$ vid tiden t definieras av ekvationen

$$r(t) = \lim_{T\to t} R(t,T).$$

Sätt

$$B(t) = B(0)e^{\int_0^t r(u)du},\ t \geq 0$$

så att

$$dB(t) = r(t)B(t)dt.$$

Liksom i kapitel 6 uppfattas processen B som prisprocessen för ett värdepapper.

Vi antar fr o m nu att den korta räntan beskrivs av en diffusionsprocess

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma dW(t),\ t \geq 0$$

där W är en normaliserad Brownsk rörelse. Här förutsätts att $\mu(t,r)$ är en reellvärd deterministisk funktion av t och r. Vidare antags att σ en positiv konstant samt att $p(t,T) = F(t, r(t); T)$, där $F(t,r;T)$ är en deterministisk funktion av t, r och T. Det är ibland praktiskt att skriva $F(t,r(t);T) = F^T(t,r(t))$.

Låt nu $0 < T < U$ och antag att vi vill hedga T-obligationen med U-obligationen. Vi bildar därför vid tiden t en portfölj bestående av en T-obligation och $-\Delta$ U-obligationer. Portföljvärdet vid tiden t blir

$$\Pi(t) = F(t, r(t); T) - \Delta F(t, r(t); U).$$

Vi försöker nu välja Δ så att

$$d\Pi(t) = r(t)\Pi(t)dt = (\Pi(t)\frac{dB(t)}{B(t)}).$$

Itôs lemma ger

$$\left\{\frac{\partial F^T}{\partial t}dt + \frac{\partial F^T}{\partial r}dr + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 F^T}{\partial r^2}dt\right\} - \Delta\left\{\frac{\partial F^U}{\partial t}dt + \frac{\partial F^U}{\partial r}dr + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 F^U}{\partial r^2}dt\right\}$$

$$= r(t)\left\{F(t, r(t); T) - \Delta F(t, r(t); U)\right\} dt.$$

Härav följer att

$$\Delta = \frac{\frac{\partial F^T}{\partial r}}{\frac{\partial F^U}{\partial r}}$$

och

$$\frac{\frac{\partial F^T}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 F^T}{\partial r^2} - rF^T}{\frac{\partial F^T}{\partial r}} = \frac{\frac{\partial F^U}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 F^U}{\partial r^2} - rF^U}{\frac{\partial F^U}{\partial r}}.$$

Dessa kvoter är alltså oberoende av T och U. Sätt

$$\lambda(t) = \lambda(t, r(t)) = \frac{\frac{\partial F^T}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 F^T}{\partial r^2} + \mu\frac{\partial F^T}{\partial r} - rF^T}{\sigma\frac{\partial F^T}{\partial r}}.$$

Processen $(\lambda(t))_{t\geq 0}$ kallas för marknadspriset för risk, ett ordval som motiveras nedan. Observera att

$$\frac{\partial F^T}{\partial t}(t, r(t)) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 F^T}{\partial r^2}(t, r(t))$$

$$+(\mu(t, r(t)) - \sigma\lambda(t, r(t))\frac{\partial F^T}{\partial r}(t, r(t)) - r(t)F^T(t, r(t)) = 0.$$

Dessutom gäller att

$$F^T(T, r(T)) = 1.$$

Vi leds alltså till den paraboliska differentialekvationen

$$\frac{\partial F^T}{\partial t}(t, r) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 F^T}{\partial r^2}(t, r) + (\mu(t, r) - \sigma\lambda(t, r))\frac{\partial F^T}{\partial r}(t, r) - rF^T(t, r) = 0$$

i området $t < T$, $r \in \mathbf{R}$ med slutvillkoret

$$F^T(T, r) = 1.$$

För att finna en stokastisk representation av av lösningen sätts

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du,\ 0 \leq t \leq T$$

och

$$W^\lambda(t) = W(t) + \Lambda(t),\ 0 \leq t \leq T.$$

Då gäller att

$$dr(t) = (\mu(t, r(t)) - \sigma\lambda(t, r(t)))dt + \sigma dW^\lambda(t),\ 0 \leq t \leq T.$$

Vi antar nu att det finns ett sannolikhetsmått Q ekvivalent med P så att så att processen $(W^\lambda(t))_{0 \leq t \leq T}$ är en normaliserad Wienerprocess relativt Q. Vi får därmed (Feynman-Kac-)lösningen

$$F(t, r; T) = E^Q\left[e^{-\int_t^T r(s)ds} \mid r(t) = r\right].$$

Om

$$\mu(t, r(t)) - \sigma\lambda(t, r(t)) = b - ar(t)$$

för lämpliga positiva konstanter a och b så har vi Vasičeks modell. Om

$$\mu(t, r(t)) - \sigma\lambda(t, r(t)) = \Theta(t) - ar(t)$$

där a är en positiv konstant och Θ en deterministisk funktion så får vi Hull-Whites modell. I kapitel 6 visades att

$$p(t; T) = F(t, r(t); T) = e^{A(t,T) - B(t,T)r(t)}$$

för lämpliga deterministiska funktioner $A(t, U)$ och $B(t, U)$.

Antag nu att vi arbetar i Hull-Whites modell och vill värdera en enkelt derivat med slutdag T som denna dag utbetalar beloppet $g(r(T))$. Det är rimligt att antaga att derivatets pris vid tiden t är av typen $F(t, r(t))$. Vi bildar därför vid tiden t en portfölj bestående av ett derivat och $-\Delta$ U-obligationer, där $U \geq T$ är godtyckligt. Portföljvärdet vid tiden t blir

$$\Pi(t) = F(t, r(t)) - \Delta F(t, r(t); U).$$

Vi försöker därför välja Δ så att

$$d\Pi(t) = r(t)\Pi(t)dt.$$

Itôs lemma ger

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial t}dt+\frac{\partial F}{\partial r}dr+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}dt\right\}-\Delta\left\{\frac{\partial F^U}{\partial t}dt+\frac{\partial F^U}{\partial r}dr+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 F^U}{\partial r^2}dt\right\}$$

$$=r(t)\left\{F(t,r(t))-\Delta F(t,r(t);U)\right\}dt.$$

Härav följer att

$$\Delta=\frac{\frac{\partial F}{\partial r}}{\frac{\partial F^U}{\partial r}}$$

och

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}-rF}{\frac{\partial F}{\partial r}}=\frac{\frac{\partial F^U}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 F^S}{\partial r^2}-rF^U}{\frac{\partial F^U}{\partial r}}.$$

Alltså är

$$\lambda(t,r(t))=\frac{\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\mu\frac{\partial F}{\partial r}-rF}{\sigma\frac{\partial F}{\partial r}}$$

och

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\left(\mu(t,r(t))-\sigma\lambda(t,r(t))\right)\frac{\partial F}{\partial r}-rF=0.$$

Om vi skriver

$$dF=(\frac{\partial F}{\partial t}dt+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\mu\frac{\partial F}{\partial r})dt+\sigma\frac{\partial F}{\partial r}dW$$

på formen

$$dF=F(\alpha_F dt+\sigma_F dW)$$

där således

$$\alpha_F=\frac{\frac{\partial F}{\partial t}dt+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\mu\frac{\partial F}{\partial r}}{F}$$

är den lokala medelavkastningen för derivatet per tidsenhet och

$$\sigma_F=\frac{\sigma\frac{\partial F}{\partial r}}{F}$$

så blir marknadspriset för risk lika med

$$\lambda(t,r(t))=\frac{\alpha_F(t)-r}{\sigma_F(t)}.$$

Genom att utnyttja att

$$F(T, r(T)) = g(r(T))$$

så ger Feynman-Kac formel ger under lämpliga förutsättningar på g att

$$F(t, r) = E^Q \left[e^{-\int_t^T r(s)ds} g(r(T)) \mid r(t) = r \right]$$

Om derivatet ifråga är en köpoption i U-obligationen med slutdag T och lösenpris K blir

$$\begin{aligned} g(r(T)) &= \max(0, p(T, U) - K) \\ &= \max(0, e^{A(T,U) - B(T,U)r(T)} - K). \end{aligned}$$

Köpoptionens pris $\text{call}(t, K, T, U)$ vid tiden $t \leq T$ erhålls genom att beräkna

$$\text{call}(t, K, T, U) = E^Q \left[e^{-\int_t^T r(s)ds} \max(0, e^{A(T,U) - B(T,U)r(T)} - K) \mid r(t) \right]$$

vilket i princip är enkelt eftersom eftersom $(\int_t^T r(s)ds, r(T))$ har en bivariat normalfördelning. Räkningarna blir dock jobbiga och vi gör beräkningen enklare genom byte av numerär.

Sats 1. *Antag $T < U$. I Vasičeks och Hull-Whites modeller gäller att*

$$\text{call}(t, K, T, U) = p(t, U)\Phi(d) - p(t, T)K\Phi(d - \sigma_p)$$

där

$$d = \frac{1}{\sigma_p} \ln \frac{p(t, U)}{K p(t, T)} + \frac{1}{2}\sigma_p$$

och

$$\sigma_p = \frac{1}{a} \left\{ 1 - e^{-a(U-T)} \right\} \sqrt{\frac{\sigma^2}{2a} \left\{ 1 - e^{-2a(T-t)} \right\}}.$$

Bevis. Vi inför T-obligationen som numerär och får

$$g(r(T)) = p(T, T) \max(0, \frac{p(T, U)}{p(T, T)} - K)$$

Sätt

$$S(t) = \frac{p(t,U)}{p(t,T)},\ 0 \le t \le T$$

och

$$B(t) = 1,\ 0 \le t \le T\ .$$

Notera att

$$S(t) = e^{(A(t,U)-A(t,T))-(B(t,U)-B(t,T))r(t)}$$

och

$$dS(t) = S(t)(\gamma(t,r(t))dt - (B(t,U) - B(t,T))dr(t))$$

för en lämplig stokastisk process $\gamma(t,r(t))$, $0 \le t \le T$. Vi ansätter att optionen har värdet $v(t,r(t))$ kr vid tiden $t \in [0,T]$ och skriver

$$v(t,r(t)) = p(t,T)w(t,S(t)).$$

Vid en godtycklig tidpunkt $t \in [0,T]$ bildas en portfölj bestående av en köpoption i U-obligationen och $-\Delta$ U-obligationer. Portföljens värde $\Pi(t)$ i den nya prisenheten vid tiden t är lika med

$$\Pi(t) = w(t,S(t)) - \Delta S(t).$$

Antag nu att

$$d\Pi(t) = 0\ (= \Pi(t)\frac{dB(t)}{B(t)}).$$

Itôs lemma ger

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,S(t))dt + \frac{\partial w}{\partial s}(t,S(t))dS(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(t,S(t))(dS(t))^2 - \Delta dS(t) = 0$$

dvs

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,S(t))dt+\frac{\partial w}{\partial s}(t,S(t))dS(t)+\frac{\sigma^2(B(t,U)-B(t,T))^2S(t)^2}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(t,S(t))dt$$
$$-\Delta dS(t) = 0.$$

Härav följer att

$$\Delta = \frac{\partial w}{\partial s}(t,S(t))$$

och

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,S(t)) + \frac{\sigma^2(B(t,U)-S(t,T))^2S(t)^2}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(t,S(t)) = 0.$$

Vi leds alltså till ekvationen

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,s)+\frac{\sigma^2(B(t,U)-B(t,T))^2s^2}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(t,S(t))=0$$

med slutvillkoret

$$w(T,s)=\max(0,s-K).$$

Vi vet redan från kapitel 1, exempel 1, att denna ekvation har (den naturliga) lösningen

$$w(t,s)=s\Phi(d(s))-K\Phi(d(s)-\sigma_*)$$

där

$$d(s)=\frac{1}{\sigma_*}\ln\frac{s}{K}+\frac{1}{2}\sigma_*$$

och

$$\sigma_*=\sigma\sqrt{\int_t^T(B(u,U)-B(u,T))^2du}.$$

Optionens värde vid tiden t uttryckt i kr blir således

$$v(t,S(T))=p(t,T)w(t,S(T))$$

$$=p(t,U)\Phi(d(S(t))-p(t,T)K\Phi(d(S(t))-\sigma_*).$$

Genom att utnyttja att

$$B(t,T)=\frac{1}{a}(1-e^{-a(T-t)})$$

följer slutligen att

$$\sigma_p=\sigma_*$$

vilket visar satsen. []

Vi avslutar detta kapitel med några mer praktiska synpunkter på Δ-hedging. Antag vi säljer en köpoption med slutdag K och lösenpris T vid tiden 0. Försäljningspriset Π är vår intäkt och vi får dessutom en vid försäljningstillfället osäker utgift på beloppet $\max(0,S(T)-K)$ vid tiden T. Det är självklart att vi kan göra en förlust på optionsaffären. Kan Black-Scholes teori vara till nytta?

I resonemanget nedan förutsätts att vi har en stark tro på Black-Scholes teori och säljer optionen till den implicita volatiliteten σ som också är vår uppfattning om aktieprisets volatilitet. Om

$$c(t,s) = s\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2)$$

där $\tau = T - t > 0$,

$$d_1 = \frac{\ln \frac{s}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

och $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$, så bestäms därför σ så att

$$c(0, S(0)) = \Pi.$$

Av intäkten Π placeras beloppet

$$\frac{\partial c}{\partial s}(0, S(0))S(0)$$

i aktier och resten

$$\Pi - \frac{\partial c}{\partial s}(0, S(0))S(0)$$

på ett banksaldo (observera att saldot är negativt). Nästa dag har denna portfölj värdet $\Pi(1)$, som fördelas på $\frac{\partial c}{\partial s}(1, S(1))$ aktier och resten av portföljvärdet placeras på ett banksaldo. Proceduren upprepas till slutdagen T. För att komma närmare förutsättningarna i Black-Scholes modell förutsätts att hedgingen utförs i kontinuerlig tid dvs portföljvärdet $\Pi(t)$ vid tiden t fördelas på $\frac{\partial c}{\partial s}(t, S(t))$ aktier och resten av portföljvärdet placeras på ett banksaldo. Härigenom erhålls en självfinansierande portföljstrategi varför

$$d\Pi(t) = \frac{\partial c}{\partial s}(t, S(t))dS(t) + r(\Pi(t) - \frac{\partial c}{\partial s}(t, S(t)S(t))dt$$

och $\Pi(0) = \Pi$. Vår vinst vid tiden T på optionsaffären är lika med

$$V = \Pi(T) - \max(0, S(T) - K).$$

Om förutsättningarna i Black-Scholes modell är uppfyllda är $V = 0$.

Antag nu att vår uppfattning om aktieprisets dynamik är fel. Antag istället att aktiepriset beskrivs av den stokastiska differentialekvationen

$$dS(t) = S(t)(a(t)dt + b(t)dW(t)),\ \ 0 \le t \le T$$

där $a \in \mathcal{L}^1_{loc}[0,T]$, $b \in \mathcal{L}^2_{loc}[0,T]$ och där volatiliteten $b(t) = b(t,\omega)$ inte är konstant. Volatiliteten kan här t o m vara stokastisk. Vad kan sägas om V i detta fall?

I samband med denna fråga visar sig köpoptionens gamma vara viktig. Köpoptionens gamma (enligt vår uppfattning om σ) ges av

$$\Gamma(t,s) = \frac{\partial^2 c}{\partial s^2}(t,s)$$

där

$$\Gamma(t,s) = \frac{1}{s\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}.$$

Sätt nu

$$V(t) = \Pi(t) - c(t,S(t)),\ 0 \le t \le T$$

och notera att $V(0) = 0$ och $V(T) = V$. Vidare är

$$dV(t) = d\Pi(t) - dc(t,S(t))$$

$$= \frac{\partial c}{\partial s}(t,S(t))dS(t) + r(\Pi(t) - \frac{\partial c}{\partial s}(t,S(t))S(t))dt$$

$$-(\frac{\partial c}{\partial t}(t,S(t))dt + \frac{\partial c}{\partial s}(t,S(t))dS(t) + \frac{1}{2}b^2(t)S^2(t)\frac{\partial^2 c}{\partial^2 s}(t,S(t))dt)$$

$$= (r\Pi(t) - r\frac{\partial c}{\partial s}(t,S(t))S(t) - \frac{\partial c}{\partial t}(t,S(t)) - \frac{1}{2}b^2(t)S^2(t)\frac{\partial^2 c}{\partial^2 s}(t,S(t)))dt.$$

Genom att utnyttja Black-Scholes differentialekvation

$$\frac{\partial c}{\partial t}(t,S(t)) + \frac{\sigma^2}{2}S^2(t)\frac{\partial^2 c}{\partial s^2}(t,S(t)) + rS(t)\frac{\partial c}{\partial s}(t,S(t)) - rc(t,S(t)) = 0$$

erhålls

$$dV(t) = rV(t)dt + \frac{\sigma^2 - b^2(t)}{2}S^2(t)\frac{\partial^2 c}{\partial s^2}(t,S(t))dt.$$

Denna ordinära differentialekvation kan lösas explicit och det följer att

$$V(T) = \int_0^T e^{r(T-t)}\frac{\sigma^2 - b^2(t)}{2}S^2(t)\frac{\partial^2 c}{\partial s^2}(t,S(t))dt$$

dvs

$$V = \int_0^T e^{r(T-t)}\frac{\sigma^2 - b^2(t)}{2}S^2(t)\Gamma(t,S(t))dt.$$

Eftersom $\Gamma > 0$ blir $V > 0$ om $\sigma^2 > b^2(t)$ för alla $0 \leq t \leq T$ och vi gör i detta fall en vinst. Å andra sidan kan det vara svårt att sälja optionen till en hög implicit volatilitet (dvs högt optionspris). Om $\sigma^2 < b^2(t)$ för alla $0 \leq t \leq T$ blir $V < 0$. Att underskatta volatiliteten leder till förlust.

Resonemanget blir analogt för en europeisk säljoption.

Övningar

1. Antag att volatiliteten för ett aktiepris vid tiden t är en deterministisk funktion av t och aktiepriset $S(t)$ vid tiden t. Härled en motsvarighet till Black-Scholes differentialekvation.

2. Antag att volatiliteten för ett aktiepris vid tiden t är en deterministisk funktion av t och aktiepriset $S(t)$ vid tiden t. Härled en motsvarighet till Black-Scholes differentialekvation.

3. Antag $\varepsilon > 0$. En marknadsmodell består av en aktie och en obligation med prisprocesserna

$$dS(t) = S(t)(dt + (t+\varepsilon)dW(t))$$

respektive

$$dB(t) = B(t)dt$$

i tidsintervallet $0 \leq t \leq T$.

a) Visa att

$$(\frac{S(t)}{B(t)})_{0 \leq t \leq T}$$

är en martingal.

b) Ett betingat kontrakt ger innehavaren beloppet $Y = e^{W(T)+\frac{T}{2}}$ vid tiden T. Visa att

$$\begin{cases} h_S(t) = \frac{1}{(t+\varepsilon)S(t)} e^{W(t)+\frac{t}{2}} \\ h_B(t) = (1 - \frac{1}{t+\varepsilon}) \frac{1}{B(t)} e^{W(t)+\frac{t}{2}} \end{cases}$$

definierar en hedging av Y sådan att

$$(S(t)h_S(t))_{0\leq t\leq T} \in \mathcal{L}^2\,[0,T]$$

och

$$(h_B(t))_{0\leq t\leq T} \in \mathcal{L}^1_{loc}\,[0,T]\,.$$

c) Visa att

$$\int_0^T (S(t)h_S(t))^2 dt \to \infty \quad \text{n.s.}$$

då $\varepsilon \to 0$.

I de följande övningarna förutsätts Black-Scholes modell. Det antags att det underligganade sannolikhetsrummet ät komplett och att $\mathcal{F}_t$ är den σ-algebra som genereras av nollmängderna och aktiepriset t o m tiden t. Om $(X(t),\,\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ är en martingal med avseende på det underliggande sannolikhetsrummet $(\Omega,\,\mathcal{F}_T, Q)$ sägs processen $(X(t))_{0\leq t\leq T}$ vara en Q-martingal.

4. Låt Q vara martingalmåttet för Black-Scholes modell i tidsintervallet $[0,T]$ och låt I vara ett delintervall av reella tallinjen. Redogör för hur sannolikheten $Q\,[S(T) \in I]$ kan bestämmas vid tiden $t = 0$ om priset på alla köpoptioner med slutdag T och godtyckligt lösenpris $K > 0$ är känt vid tiden $t = 0$.

5. Visa att
$$d(e^{-rt}S(t)) = \sigma e^{-rt}S(t)dW^\lambda(t).$$

6. Antag
$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,s) + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(t,s) + rs\frac{\partial v}{\partial s}(t,s) - rv(t,s) = 0$$
och
$$dS(t) = S(t)(rdt + \sigma dW^\lambda(t)).$$
a) Visa att
$$d(e^{-rt}v(t,S(t))) = \sigma e^{-rt}v'_s(t,S(t))S(t)dW^\lambda(t).$$

c) Antag $T > 0$ och $v(T,s) = g(s)$, där $g \in \mathcal{P}$. Visa att

$$E\left[\int_0^T (v_s'(t,S(t))S(t))^2 dt\right] < \infty.$$

7. En portföljstrategi bestående av $h_S(t)$ aktier och $h_B(t)$ obligationer vid tiden $t \in [0,T]$ sägs vara en tillåten självfinansierande strategi om portföljvärdet

$$v(t) = h_S(t)S(t) + h_B(t)B(t)$$

uppfyller ekvationen

$$dv(t) = h_S(t)dS(t) + h_B(t)dB(t)$$

i intervallet $0 \leq t \leq T$ där h_S och att h_B är progressivt mätbara och

$$E^Q\left[\int_0^T (h_S(t)S(t))^2 dt\right] < \infty$$

och

$$\int_0^T \mid h_B(t) \mid dt < \infty \text{ n.s. } [P]$$

a) Visa att

$$d(e^{-rt}v(t)) = \sigma e^{-rt} h_S(t)S(t)dW^\lambda(t)$$

och dra slutsatsen att den diskonterade värdeprocessen $(e^{-rt}v(t))_{0\leq t\leq T}$ är en Q-martingal.

b) Visa att det inte kan inträffa

$$v(0) = 0,\ v(T) \geq 0 \text{ n.s. } [P]$$

och

$$E[V(T)] > 0.$$

8. Antag $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$ och

$$Y = E^Q[Y] + \int_0^T f(t)dW^\lambda(t)$$

där f är progressivt mätbar och

$$E^Q\left[\int_0^T f^2(t)dt\right] < \infty.$$

(Itôs representationssats garanterar alltid en sådan representation av godtyckligt $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$.) Visa att det finns en tillåten självfinansierande strategi som har värdeprocessen

$$v(t) = e^{-r(T-t)} E^Q \left[Y \mid \mathcal{F}_t \right], \ 0 \leq t \leq T.$$

(I Black-Scholes teori definieras $v(t)$ som det teoretiska priset för ett betingat kontrakt som ger innehavaren beloppet Y vid tiden T. I nästa kapitel motiveras denna definition genom att studera Y av formen $g(S(T_1), ..., S(T_n))$.)

9. En europeisk köpoption i aktien med slutdagen T och lösenpriset K har det teoretiska priset $c(t, S(t), K)$ vid tiden $t \in [0, T[$, där $c(t, s, K) = s\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2)$, $\tau = T - t$,

$$d_1 = \frac{\ln \frac{s}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

och $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$. Visa att

a)
$$\frac{\partial c}{\partial s} = \Phi(d_1)$$

b)
$$\frac{c(t, s, K)}{c(t, s_0, K)} > \frac{s}{s_0} \text{ om } s > s_0.$$

10. Diskutera hur en option kan hedgas med en annan option.