9. Några exotiska optioner i Black-Scholes modell

I detta kapitel arbetar vi genomgående i Black-Scholes modell dvs vi har en värdepappersmodell med en aktie och en obligation. Aktiens prisprocess ges av ekvationen

$$S(t) = S(0)e^{\alpha t + \sigma W(t)},\ 0 \leq t \leq T$$

där $W = (W(t))_{0 \leq t \leq T}$ är en normaliserad Wienerprocess i tidsintervallet $[0, T]$. Obligationens prisprocess ges av ekvationen

$$B(t) = B(0)e^{rt},\ 0 \leq t \leq T.$$

Här är $\alpha, \sigma, S(0), B(0)$ och r reella konstanter varav de fyra sista är positiva. Om $\mu = \alpha + \frac{\sigma^2}{2}$ så följer att

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)).$$

Antag nu vi har ett enkelt derivat av europeisk typ som utbetalar beloppet $g(S(T))$ slutdagen T, där $g \in \mathcal{P}$. Vi visade i förra kapitlet att det finns en stokastisk representation av lösningen som kan beskrivas på följande sätt. Inför först marknadspriset för risk

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

och sätt

$$W^\lambda(t) = W(t) + \lambda t,\ 0 \leq t \leq T.$$

Det följer att

$$dS(t) = S(t)(rdt + \sigma dW^\lambda(t)),\ 0 \leq t \leq T.$$

Om vi inför martingalmåttet $Q = Q^T$ genom att

$$dQ = e^{-\lambda W(T) - \frac{1}{2}\lambda^2 T} dP$$

så ges derivatets värdevid tiden $t \leq T$ av

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-r\tau} E^Q \left[g(S(T)) \mid S(t) \right] \\ &= e^{-r\tau} E^Q \left[g(S(T)) \mid \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

där $\mathcal{F}_t = \sigma(S(u);\, u \leq t)$ och $\tau = T - t$. Vidare är processen

$$W^{\lambda}(t) = W_t + \lambda t,\ 0 \leq t \leq T$$

en normaliserad reellvärd Wienerprocess i tidsintervallet $[0, T]$ relativt sannolikhetsmåttet Q. Om $T_0 < T$ och $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{T_0}, Q)$ så gäller att

$$E^{Q^T}[X] = E^{Q^{T_0}}[X]$$

och

$$E^{Q^T}[X \mid \mathcal{F}_t] = E^{Q^{T_0}}[X \mid \mathcal{F}_t]\,,\ 0 \leq t \leq T_0$$

eftersom processen

$$(e^{-\lambda W(t) - \frac{1}{2}\lambda^2 t}, \mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$$

är en $P-$martingal.

Ett derivat som till innehavaren utbetalar ett $\mathcal{F}_T$-mätbart belopp Y slutdagen T kallas för ett betingat kontrakt (i matematiska miljöer identifieras ofta derivatet och Y). För att betona att kontraktet endast kan lösas in slutdagen T kan man tillägga att derivatet är av europeisk typ. Liksom för enkla derivat är det mycket praktiskt att tillåta att Y får antaga negativa såväl som icke-negativa värden. Syftet med detta kapitel är att behandla prissättning av betingade kontrakt, som också ibland kallas exotiska optioner.

Betrakta ett derivat som utbetalar ett belopp $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$ vid tiden T. Det är rimligt att definiera derivatets (teoretiska) värde $v(t)$ vid tiden t $< T$ genom ekvationen

$$v(t) = e^{-r\tau} E^Q[Y \mid \mathcal{F}_t]$$

där som vanligt $\tau = T - t$. För att motivera detta antag först att $t < T_1 <$ ... $< T_n = T$ och att

$$Y = g(S(T_1), S(T_2), ..., S(T_n))$$

där funktionen $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ är begränsad och mätbar. Från prisformeln för enkla derivat av europeisk typ följer att

$$v(T_{n-1}) = e^{-r(T_n - T_{n-1})} E^Q\left[Y \mid \mathcal{F}_{T_{n-1}}\right]$$

är av formen

$$h(S(T_1), ..., S(T_{n-1}))$$

för en lämplig begränsad mätbar funktion h. Låt oss nu före tiden T_{n-1} se derivatet som ett derivat som ger innehavaren beloppet $h(S(T_1), ..., S(T_{n-1}))$ vid tiden T_{n-1}. Ett lämpligt induktionsantagande leder nu till att

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-r(T_{n-1}-t)} E^{Q^{T_{n-1}}} \left[h(S(T_1), ..., S(T_{n-1})) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-r(T_{n-1}-t)} E^{Q} \left[h(S(T_1), ..., S(T_{n-1})) \mid \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

Här är uttrycket i höger led lika med

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-r(T_{n-1}-t)} E^{Q} \left[e^{-r(T_n - T_{n-1})} E^{Q} \left[Y \mid \mathcal{F}_{T_{n-1}} \right] \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-r\tau} E^{Q} \left[Y \mid \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

För godtyckligt $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$ definieras därför derivatets (teoretiska) värde $v(t)$ vid tiden $t < T$ av formeln

$$v(t) = e^{-r\tau} E^{Q} \left[Y \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Priset för ett betingat kontrakt av typen

$$g(S(T_1), ..., S(T_n))$$

kan beräknas med hjälp av följande sats.

Sats 1 (Beräkningsformel för Q-mått) *Antag $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ är en Borelfunktion, $g(S(T_1), ..., S(T_n)) \in L^2(Q)$ och låt $t \leq T_1 < ... < T_n = T$. Då gäller att*

$$\begin{aligned} & E^{Q} \left[g(S(T_1), ..., S(T_n)) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= E \left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T_1-t)+\sigma(W_{T_1}-W_t)}, ..., se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T_n-t)+\sigma(W_{T_n}-W_t)}) \right] \end{aligned}$$

där $s = S(t)$ skall sättas in i uttrycket i höger led när väntevärdet beräknats. Alltså gäller även att

$$\begin{aligned} & E^{Q} \left[g(S(T_1), ..., S(T_n)) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= E \left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T_1-t)+\sigma W(T_1-t)}, ..., se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T_n-t)+\sigma W(T_n-t)}) \right] \end{aligned}$$

där $s = S(t)$ skall sättas in i uttrycket i höger led när väntevärdet beräknats.

Bevis. Vi har att

$$E^Q\left[g(S(T_1), ..., S(T_n)) \mid \mathcal{F}_t\right]$$
$$= E^Q\left[g(S(t)e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})(T_1-t)+\sigma(W(T_1)-W(t))}, ..., S(t)e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})(T_n-t)+\sigma(W(T_n)-W(t))}) \mid \mathcal{F}_t\right]$$
$$= E^Q\left[g(S(t)e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T_1-t)+\sigma(W^\lambda(T_1)-W^\lambda(t))}, ..., S(t)e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T_n-t)+\sigma(W^\lambda(T_n)-W^\lambda(t))}) \mid \mathcal{F}_t\right]$$
$$= E^Q\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T_1-t)+\sigma(W^\lambda(T_n)-W^\lambda(t))}, ..., se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T_n-t)+\sigma(W^\lambda(T_n)-W^\lambda(t))})\right]$$
$$= E\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T_1-t)+\sigma(W(T_1)-W(t))}, ..., se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T_n-t)+\sigma(W(T_n)-W(t))})\right]$$

vilket bevisar satsen. []

Exempel 1 (Forwardstartande köpoption). Antag $T_0 < T$ och betrakta ett betingat kontrakt $Y = \max(0, S(T) - S(T_0))$ med slutdagen T. Om $t \geq T$ är $S(T_0)$ känd vid tiden t och vi har en vanlig köpoption. I annat fall talar vi om en forwardstartande köpoption. Optionens värde vid tiden T_0 ges av

$$\Pi_Y(T_0) = S(T_0))c(T_0, 1, 1; T)$$

där

$$c(T_0, 1, 1; T) =$$
$$= \Phi((r + \frac{\sigma^2}{2})\frac{\sqrt{T - T_0}}{\sigma}) - e^{-t(T-T_0)}\Phi((r + \frac{\sigma^2}{2})\frac{\sqrt{T - T_0}}{\sigma})$$

Alltså är

$$\Pi_Y(t) = S(t))c(T_0, 1, 1; T), \text{ om } t \leq T_0.$$

Låt N vara ett positivt heltal och sätt

$$t_n = \frac{n}{N}T, \ n = 0, ..., N.$$

Ett kontrakt som ger innehavaren beloppet $\max(0, S(T_n) - S(T_{n-1})$ vid tiden t_n för $n = 1, ..., N$ kallas ibland en cliquetoption.

Exempel 2 (Cliquetoption med golv). Låt n vara ett positivt heltal och sätt
$$t_k = \frac{k}{n}T,\ k = 0, ..., n.$$
Storheten
$$R_k = \frac{S(t_k)}{S(t_{k-1})} - 1$$
kallas aktiens (procentuella) marknadsavkastning i tidsintervallet $[t_{k-1}, t_k]$ för $k = 1, ..., n$. Antag R är ett givet positivt tal. Ett betingat kontrakt som slutdagen T ger innehavaren beloppet

$$Y = \max(0, R + \sum_{k=1}^{n} \min(0, R_k))$$

kallas för en cliquetoption med golv . Det är praktiskt att skriva $X_k = -R_k$ och $\min(0, R_k) = -\max(0, X_k) = -X_k^+$ så att

$$Y = \max(0, R - \sum_{k=1}^{n} X_k^+).$$

Priset vid tiden $t < T$ ges av formeln

$$\Pi_Y(t) = e^{-r\tau} E^Q \left[\max(0, R - \sum_{k=1}^{n} X_k^+) \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Här kan sats 1 utnyttjas för att beräkna ciquetoptionens pris. I allmänhet är det väldigt tidsödande att beräkna multipelintegraler men denna gång kan en kombination av sats 1 och Fourieranalys utnyttjas för att få en explicit och enkel prisformel. Vi nöjer oss med att beräkna priset vid tiden 0.

Sätt
$$\Lambda(x) = \max(0, R- \mid x \mid),\ x \in \mathbf{R}.$$
Det är bekant från Fourieranalysen att denna funktion har Fouriertransformen
$$(\frac{2 \sin \frac{R}{2}\xi}{\xi})^2$$
dvs att
$$\Lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{2 \sin \frac{R}{2}\xi}{\xi})^2 e^{i\xi x} \frac{d\xi}{2\pi}.$$

Härav följer att

$$\max(0, R-x) = \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{2\sin\frac{R}{2}\xi}{\xi})^2 e^{i\xi x}\frac{d\xi}{2\pi},\ x \geq 0.$$

Alltså är

$$\begin{aligned}\Pi_Y(0) &= e^{-rT}E^Q\left[\max(0, R-\sum_{k=1}^{n} X_k^+)\right] \\ &= e^{-rT}E^Q\left[\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{2\sin\frac{R}{2}\xi}{\xi})^2 e^{i\xi\sum_{k=1}^{n}X_k^+}\frac{d\xi}{2\pi}\right] \\ &= e^{-rT}E^Q\left[\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{2\sin\frac{R}{2}\xi}{\xi})^2\prod_{k=1}^{n}e^{i\xi X_k^+}\frac{d\xi}{2\pi}\right] \\ &= e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{2\sin\frac{R}{2}\xi}{\xi})^2 E^Q\left[\prod_{k=1}^{n}e^{i\xi X_k^+}\right]\frac{d\xi}{2\pi}.\end{aligned}$$

Eftersom de stokastiska variablerna $X_1^+, ..., X_n^+$ bildar en i.i.d. följer att

$$\Pi_Y(0) = e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{2\sin\frac{R}{2}\xi}{\xi})^2(E^Q\left[e^{i\xi X_1^+}\right])^n\frac{d\xi}{2\pi}.$$

Beroende på sats 1 kan vi nu skriva

$$\Pi_Y(0) = e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{2\sin\frac{R}{2}\xi}{\xi})^2(E\left[e^{i\xi X^+}\right])^N\frac{d\xi}{2\pi}$$

där

$$X = 1 - e^{a+bG},$$

$G \in N(0,1)$, $a = (r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{n}$ och $b = \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}$. Det gäller att

$$P\left[X^+ \leq x\right] = 0 \text{ om } x < 0$$

och

$$\begin{aligned}P\left[X^+ = 0\right] &= P\left[(1-e^{a+bG})^+ = 0\right] \\ &= P\left[a + bG \geq 0\right] = \Phi(\frac{a}{b}).\end{aligned}$$

Om $0 < x < 1$ blir

$$P\left[0 < X^+ \leq x\right] = P\left[0 < X \leq x\right]$$

$$= P\left[a + bG < 0,\ 1 - e^{a+bG} \le x\right]$$
$$= P\left[G < -\frac{a}{b},\ G \ge -\frac{a}{b} + \frac{1}{b}\ln(1-x)\right]$$
$$= \int_{-\frac{a}{b}+\frac{1}{b}\ln(1-x)}^{-\frac{a}{b}} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{du}{\sqrt{2\pi}}$$
$$= \int_0^x f(y)dy$$

där

$$f(x) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1-x} e^{-\frac{1}{2}(\frac{a}{b} - \frac{1}{b}\ln(1-x))^2}.$$

Alltså är

$$E\left[e^{i\xi X^+}\right] = \Phi(\frac{a}{b}) + \int_0^1 f(x)e^{i\xi x}dx$$

och därmed gäller att

$$\Pi_Y(0) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{2\sin\frac{R}{2}\xi}{\xi})^2 (\Phi(\frac{a}{b}) + \int_0^1 f(x)e^{i\xi x}dx)^n \frac{d\xi}{2\pi}.$$

Såvitt vi vet kom en cliquetoption med golv för första gången ut på svenska marknaden i slutet av år 2000. I detta fall var $n = 18$ (se t ex Björn Wilkes artikel "Cliquet sätter bara räntan på spel", Dagens industri 29 november 2000).

Exempel 3 (Geometrisk medelvärdesoption). På marknaden förekommer ofta olika typer av asiatiska optioner. Ett typiskt sådant betingat kontrakt Y med slutdagen T ges av

$$Y = \max(0, \frac{1}{T}\int_0^T S(u)du - K)$$

där K är en postiv konstant, ofta kallad lösenpris. Här finns ingen känd analytisk prisformel men det finns flera approximativa metoder som ger bra resultat (se t ex $[RS]$). PDE-metoder belyses i ett senare kapitel. I detta sammanhang kan den så kallade geometriska medelvärdesekvationen ha ett visst pedagogiskt intresse. Antag K och T är positiva reella tal. Den geometriska medelvärdesoptionen av europeisk typ med lösenvärdet

$$Y = \max(0, e^{\frac{1}{T}\int_0^T \ln S(t)dt} - K)$$

vid tiden T har det teoretiska priset

$$\Pi_Y(t) = e^{-r\tau}\left\{e^{m+\frac{1}{2}\sigma_*^2}\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)\right\}$$

vid tiden $t \in [0, T[$, där $\tau = T - t$,

$$m = \frac{1}{T}\left\{\int_0^t \ln S(u)du + \tau \ln S(t) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\tau^2}{2}\right\},$$

$$\sigma_* = \sqrt{\sigma^2\frac{\tau^3}{3T^2}},$$

$$d_1 = \frac{m + \sigma_*^2 - \ln K}{\sigma_*}$$

och

$$d_2 = \frac{m - \ln K}{\sigma_*}.$$

För att bevisa påståendet konstaterar vi först att

$$\int_0^T W(t)dt \in N(0, T^3/3).$$

En partiell integration visar nämligen att

$$\int_0^T W(t)dt = \int_0^T (T-t)dW(t)$$

och

$$E\left[\left(\int_0^T W(t)dt\right)^2\right] = E\left[\left(\int_0^T (T-t)dW(t)\right)^2\right]$$
$$= \int_0^T (T-t)^2 dt = T^3/3.$$

För att härleda den geometriska medelvärdesoptionens pris införs

$$Z(t) = \int_0^t \ln S(u)du$$

så att

$$v(t) = e^{-r\tau}E^Q\left[\max(0, e^{\frac{Z(t)}{T} + \frac{Z(T)-Z(t)}{T}} - K) \mid \mathcal{F}_t\right]$$

och

$$v(t) = e^{-r\tau} E^Q \left[\max(0, e^{\frac{z}{T} + \frac{1}{T}\int_t^T \ln S(u) du} - K) \right]$$

där $z = Z(t)$ skall sättas in i uttrycket när väntevärdet beräknats. Av ekvationen

$$S(t) = S(0) e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + W_t}$$

får vi

$$\ln S(u) = \ln S(t) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(u-t) + \sigma(W(u) - W(t))$$

$$= \ln S(t) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(u-t) + \sigma(W^\lambda(u) - W^\lambda(t)).$$

Alltså gäller att

$$v(t) = e^{-r\tau} E^Q \left[\max(0, e^{m + \frac{\sigma}{T}\int_t^T (W^\lambda(u) - W^\lambda(t)) du} - K) \right]$$

$$= e^{-r\tau} E \left[\max(0, e^{m + \frac{\sigma}{T}\int_t^T (W(u) - W(t)) du} - K) \right] =$$

$$= e^{-r\tau} E \left[\max(0, e^{m + \frac{\sigma}{T}\int_0^{T-t} W(u) du} - K) \right].$$

$$= e^{-r\tau} E \left[\max(0, e^{m + \frac{\sigma}{T}\sqrt{\frac{(T-t)^3}{3}} G} - K) \right]$$

$$= e^{-r\tau} E \left[\max(0, e^{m + \sigma_* G} - K) \right]$$

där $G \in N(0,1)$. En enkel räkning visar nu resultatet.

Så kallade barriäroptioner och lookback-optioner kan värderas genom att utnyttja den kända fördelningen för maximium eller minimum av Brownsk rörelse med linjär drift över ett kompakt intervall. Låt $\alpha \in R$ och $\sigma > 0$. Sätt

$$X(t) = \alpha t + \sigma W(t), \;\; 0 \le t \le T$$

och antag att $x > 0$, $x \ge y$ och $t > 0$. Vi visade i kapitel 4 att

$$P \left[\max_{0 \le u \le t} X(u) \le x, \;\; X(t) \le y \right] = \Phi(\frac{y - \alpha t}{\sigma\sqrt{t}}) - e^{\frac{2\alpha x}{\sigma^2}} \Phi(\frac{y - 2x - \alpha t}{\sigma\sqrt{t}}).$$

Eftersom
$$\min_{0\le u\le t} X(u) = -\max_{0\le u\le t}(-X(u))$$
och $(-W(t))_{0\le t\le T}$ är en normaliserd Wienerprocess följer att
$$P\left[\min_{0\le u\le t} X(u) \ge -x,\ X(t) \ge -y\right] = \Phi(\frac{y+\alpha t}{\sigma\sqrt{t}}) - e^{-\frac{2\alpha x}{\sigma^2}}\Phi(\frac{y-2x+\alpha t}{\sigma\sqrt{t}}).$$

Bärriäroptioner framträdde redan under den heroiska perioden 1973-1980 och torde vara vanligaste typen av exotisk option. Det finns väldigt många typer av barriäroptioner och här ger vi endast två exempel.

Exempel 4 (Binär ned-och-ut option). Antag $0 < H < S(0)$ och betrakta ett betingat kontrakt med
$$Y = R1_{\left[\min_{0\le t\le T} S(t) > H\right]}$$
där R är en positiv konstant. Denna option av barriäroptionstyp kallas en binär ned-och-ut option. Det gäller att
$$\Pi_Y(0) = e^{-rT}E^Q\left[R1_{\left[\min_{0\le t\le T} S(t)>H\right]}\right].$$
Eftersom
$$S(t) = S(0)e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W^\lambda(t)}$$
gäller att
$$\min_{0\le t\le T} S(t) > H$$
om och endast om
$$\min_{0\le t\le T}((r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W^\lambda(t)) > \ln\frac{H}{S(0)}.$$
Men
$$Q\left[\min_{0\le t\le T}((r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W^\lambda(t)) > \ln\frac{H}{S(0)}\right]$$
$$= \Phi(\frac{\ln\frac{S(0)}{H}+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}) - e^{\frac{(2r-\sigma^2)\ln\frac{H}{S(0)}}{\sigma^2}}\Phi(\frac{\ln\frac{H}{S(0)}+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}})$$

$$= \Phi(\frac{\ln\frac{S(0)}{H} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}) - (\frac{H}{S(0)})^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi(\frac{\ln\frac{H}{S(0)} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}).$$

Alltså är

$$\Pi_Y(0) = e^{-rT}R\left\{\Phi(\frac{\ln\frac{S(0)}{H} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}) - (\frac{H}{S(0)})^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi(\frac{\ln\frac{H}{S(0)} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}})\right\}.$$

Exempel 5 (Upp-och-ut köpoption). En upp-och-ut köpoption försvinner från marknaden om aktiepriset träffar eller överstiger en viss nivå H. I annat fall utbetalar optionen beloppet $\max(0, S(T) - K)$ slutdagen T, där $K > 0$ är lösenpriset. Antags att $S(0) < H$ och $K < H$. Det handlar här om ett betingat kontrakt som ger innehavaren beloppet

$$Y = 1_{\left[\max_{0\le t\le T} S(t) < H\right]} \max(0, S(T) - K)$$

slutdagen T. Optionspriset vid tiden $t = 0$ ges av

$$\Pi_Y(0) = e^{-rT}E^Q\left[1_{\left[\max_{0\le t\le T} S(t) < H\right]} \max(0, S(T) - K)\right]$$

$$= e^{-rT}E^Q\left[1_{\left[\max_{0\le t\le T} S(t) < H\right]}(S(T) - K);\ S(T) \ge K\right]$$

$$= e^{-rT}E^Q\left[S(T)1_{\left[\max_{0\le t\le T} S(t) < H\right]};\ S(T) \ge K\right]$$

$$-e^{-rT}KE^Q\left[1_{\left[\max_{0\le t\le T} S(t) < H\right]};\ S(T) \ge K\right].$$

Fördelningen för den 2-dimensionella stokastiska variabeln

$$(\max_{0\le t\le T}((r - \frac{\sigma^2}{2})t + W^\lambda(t)), (r - \frac{\sigma^2}{2})T + W^\lambda(T))$$

är känd från kapitel 4 och det visar sig möjligt att härleda en analytisk prisformel, som vi återger utan bevis.

Sätt först

$$F(a, b, \theta) = \Phi(a - \theta) - e^{2b\theta}\Phi(a - 2b - \theta),\ a \le b,\ \theta \in \mathbf{R}.$$

Då är

$$\Pi_Y(0) = S(0)(F(\hat{H}, \hat{H}, \theta_+) - F(\hat{K}, \hat{H}, \theta_+))$$

$$-Ke^{-r\tau}((F(\hat{H},\hat{H},\theta_-)-F(\hat{K},\hat{H},\theta_-))$$

där

$$\hat{K}=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ln\frac{K}{S(0)},$$

$$\hat{H}=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ln\frac{H}{S(0)}$$

$$\theta_+=\frac{\sqrt{T}}{\sigma}(r+\frac{\sigma^2}{2})$$

och

$$\theta_-=\frac{\sqrt{T}}{\sigma}(r-\frac{\sigma^2}{2}).$$

För mer information om barriäroptioner hänvisas till Björks bok $[BTO]$ eller Elliotts och Kopps bok $[EK]$.

Exempel 6 (Lookback-optioner). Det finns många olika typer av så kallade lookback-optioner. En lookback-option kan t ex göra det möjligt att i slutet av en tidsperiod få sälja en aktie till det högsta priset under perioden. Alternativt kan lookback-optionen ge rättigheten att i slutet av en given tidsperiod få köpa aktien till det lägsta priset under perioden.

En betingat kontrakt Y som gör det möjligt att vid tiden T sälja aktien till det högsta priset under perioden $[0,T]$ har formen

$$Y=\max_{0\le t\le T}S(t)-S(T).$$

Priset vid tiden $t\in[0,T]$ ges av

$$\Pi_Y(t)=v(t,S(t),M(t))$$

där

$$M(t)=\max_{0\le u\le t}S(u)$$

och

$$v(t,s,M)=-s\Phi(-\frac{\ln\frac{s}{M}+(r+\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}})$$

$$+Me^{-r\tau}\Phi(-\frac{\ln\frac{s}{M}+(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}})$$

$$-se^{-r\tau}\frac{\sigma^2}{2r}(\frac{M}{s})^{\frac{2r}{\sigma^2}}\Phi(\frac{\ln\frac{s}{M}-(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}})$$

$$+s\frac{\sigma^2}{2r}\Phi(\frac{\ln\frac{s}{M}+(r+\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}).$$

Denna formel, som kan synas lång och trasslig, leder i själva verket till en mycket snabb beräkning av optionspriset. Härledningen av optionsformeln utesluts här (se t ex $[CC]$).

Övningar

1. Låt $K > 0$ och $0 < T_0 < T_1 < T$. Ett derivat utbetalar

   $$Y = (0, (S(T_0)S(T_1)S(T))^{\frac{1}{3}} - K)$$

   Bestäm derivatets värde vid en godtycklig tidpunkt $t \in [0, T]$. Lös motsvarande problem då

   $$Y = \max(0, \left(\prod_{j=1}^{n} S(\frac{j}{n}T)\right)^{\frac{1}{n}} - K).$$

2. Antag $n \in \mathbf{N}_+$, $0 < T_0 < T$ och

   $$T_j = T_0 + \frac{j}{n}(T - T_0),\ j = 1, ..., n.$$

   Ett derivat i aktien utbetalar $\mid S(T_j) - S(T_{j-1}) \mid$ vid tiden T_j för $j = 1, ..., n$. Bestäm derivatets värde $\Pi_Y(t) = v_n(t)$ vid tiden $t \in [0, T_0]$. Visa också att $v_n(t) \to \infty$ då $n \to \infty$.