FINANSIELLA DERIVAT OCH STOKASTISK ANALYS
(CTH$[TMA285]$ **, GU** $[MAM695]$**)**
INLÄMNINGSUPPGIFT 1
(lämnas in senast 16 november, kl 11.45)

1. Antag $0 < T_0 < T$ och att en viss aktieprisprocess $(S(t))_{0\leq t\leq T}$ har volatilititen σ_0 i tidsintervallet $[0, T_0]$ och volatiliteten σ_1 i tidsintervallet $]T_0, T]$. Ett europeiskt derivat i motsvarande aktie utbetalar slutdagen T beloppet $\frac{1}{S(T)}$. Bestäm derivatets värde vid tiden $t \in [0, T[$.

2. a) Antag $T > 0$. Skriv $W(T)$ och $\int_0^T W(t)dt$ som stokastiska integraler av Paley-Wiener-Zygmunds typ. b) Antag $n \in \mathbf{N}_+$. Visa att

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} W(\frac{k}{n}) = \int_0^1 h_n(t)dW(t)$$

där

$$h_n(t) = 1 - \frac{k}{n}, \ \frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n}, \ k = 0, ..., n-1.$$

b) Beräkna variansen av den stokastiska variabeln

$$X = \int_0^1 W(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} W(\frac{k}{n}).$$

3. a) Lös den stokastiska differentialekvationen

$$dX(t) = -\frac{X(t)}{1-t}dt + dW(t), \ \ 0 \leq t < 1$$

med begynnelsevärdet $X(0) = 0$. Bestäm kovariansfunktionen för den stokastiska processen $(X(t))_{0\leq t<1}$.

b) Sätt $Y(t) = W(t) - tW(1)$. Bestäm kovariansfunktionen för den stokastiska processen $(Y(t))_{0\leq t\leq 1}$.

c) Beräkna väntevärdet $E[X(t)Y(t)]$ för $0 \leq t < 1$.