FINANSIELLA DERIVAT OCH STOKASTISK ANALYS
(CTH$[TMA285]$, GU $[MAM695]$)
INLÄMNINGSUPPGIFT 2
(lämnas in senast 30 november, kl 11.45)

1. Låt $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en i.i.d. där varje $X_n \in N(0,1)$. Sätt $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$ och
$$M_n = e^{X_1 + ... + X_n - \frac{n}{2}}, \ n = 1, 2, ... \quad .$$
Visa att $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ är en martingal.

   (Let $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ be an i.i.d., where $X_n \in N(0,1)$. Set $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$ and
$$M_n = e^{X_1 + ... + X_n - \frac{n}{2}}, \ n = 1, 2, ... \quad .$$
Prove that $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ is a martingale.)

2. Antag $u(t,x) = x^4 + 7x^3 - 6tx^2 - 21tx + 3t^2$, $t \geq 0$, $x \in \mathbf{R}$. Visa att processen $(u(t, W(t)))_{t \geq 0}$ är en Wienermartingal.

   (Suppose $u(t,x) = x^4 + 7x^3 - 6tx^2 - 21tx + 3t^2$, $t \geq 0$, $x \in \mathbf{R}$. Show that the process $(u(t, W(t)))_{t \geq 0}$ is a Wiener martingale.)

3. Antag $X(t) = \alpha t + \sigma W(t)$, $0 \leq t \leq T$, där $\alpha \in \mathbf{R}$ och $\sigma > 0$. Beräkna
$$E\left[e^M\right]$$
då $M = \max_{0 \leq t \leq T} X(t)$.

   (Suppose $X(t) = \alpha t + \sigma W(t)$, $0 \leq t \leq T$, where $\alpha \in \mathbf{R}$ and $\sigma > 0$. Find
$$E\left[e^M\right]$$
if $M = \max_{0 \leq t \leq T} X(t)$.)