FINANSIELLA DERIVAT OCH STOKASTISK ANALYS (CTH[$TMA285$] , GU [$MAM695$]) PER VECKA 6

1. a) Visa att produkten av två reellvärda mätbara funktioner är mätbar (Ledning: Kvadratregeln). b) Antag $0 \leq t_0 \leq a \leq b \leq T$. Visa att funktionen $f(s,\omega) = 1_{[a,b]}(s)W_{t_0}(\omega)$, $0 \leq s \leq T$, $\omega \in \Omega$, är progressivt mätbar.

2. Låt Q vara martingalmåttet för Black-Scholes modell i tidsintervallet $[0,T]$ och låt I vara ett delintervall av reella tallinjen. Redogör för hur sannolikheten $Q\,[S(T) \in I]$ kan bestämmas vid tiden $t = 0$ om priset på alla köpoptioner med slutdag T och godtyckligt lösenpris $K > 0$ är känt vid tiden $t = 0$.

3. Antag att volatiliteten för ett aktiepris vid tiden t är en deterministisk funktion av t och aktiepriset $S(t)$ vid tiden t. Härled en motsvarighet till Black-Scholes differentialekvation.

4. Antag $\varepsilon > 0$. En marknadsmodell består av en aktie och en obligation med prisprocesserna

$$dS(t) = S(t)(dt + (t+\varepsilon)dW(t))$$

respektive

$$dB(t) = B(t)dt$$

i tidsintervallet $0 \leq t \leq T$.

a) Visa att

$$\left(\frac{S(t)}{B(t)}\right)_{0 \leq t \leq T}$$

är en martingal.

b) Ett betingat kontrakt ger innehavaren beloppet $Y = e^{W(T)+\frac{T}{2}}$ vid tiden T. Visa att

$$\begin{cases} h_S(t) = \frac{1}{(t+\varepsilon)S(t)} e^{W(t)+\frac{t}{2}} \\ h_B(t) = (1 - \frac{1}{t+\varepsilon})\frac{1}{B(t)} e^{W(t)+\frac{t}{2}} \end{cases}$$

definierar en hedging av Y sådan att

$$(S(t)h_S(t))_{0\le t\le T}\in\mathcal{L}^2\,[0,T]$$

och

$$(h_B(t))_{0\le t\le T}\in\mathcal{L}^1_{loc}\,[0,T]\,.$$

c) Visa att

$$\int_0^T(S(t)h_S(t))^2dt\to\infty\ \ \text{n.s.}$$

då $\varepsilon\to 0$.

I de följande övningarna förutsätts Black-Scholes modell. Det antags att det underligganade sannolikhetsrummet ät komplett och att $\mathcal{F}_t$ är den σ-algebra som genereras av nollmängderna och aktiepriset t o m tiden t. Om $(X(t),\,\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ är en martingal med avseende på det underliggande sannolikhetsrummet $(\Omega,\,\mathcal{F}_T,Q)$ sägs processen $(X(t))_{0\le t\le T}$ vara en Q-martingal.

5. En portföljstrategi bestående av $h_S(t)$ aktier och $h_B(t)$ obligationer vid tiden $t\in[0,T]$ sägs vara en tillåten självfinansierande strategi om portföljvärdet
$$v(t)=h_S(t)S(t)+h_B(t)B(t)$$
uppfyller ekvationen
$$dv(t)=h_S(t)dS(t)+h_B(t)dB(t)$$
i intervallet $0\le t\le T$ där h_S och att h_B är progressivt mätbara och
$$E^Q\left[\int_0^T(h_S(t)S(t))^2dt\right]<\infty$$
och
$$\int_0^T\mid h_B(t)\mid dt<\infty\ \text{n.s.}\ [P]$$
a) Visa att
$$d(e^{-rt}v(t))=\sigma e^{-rt}h_S(t)S(t)dW^{\lambda}(t)$$

och dra slutsatsen att den diskonterade värdeprocessen $(e^{-rt}v(t))_{0\leq t\leq T}$ är en Q-martingal.

b) Visa att det inte kan inträffa

$$v(0)=0,\ v(T)\geq 0 \text{ n.s. } [P]$$

och

$$E\left[V(T)\right]>0.$$

6. Antag $Y\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,Q)$ och

$$Y=E^Q\left[Y\right]+\int_0^T f(t)dW^\lambda(t)$$

där f är progressivt mätbar och

$$E^Q\left[\int_0^T f^2(t)dt\right]<\infty.$$

(Itôs representationssats garanterar alltid en sådan representation av godtyckligt $Y\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,Q)$.) Visa att det finns en tillåten självfinansierande strategi som har värdeprocessen

$$v(t)=e^{-r(T-t)}E^Q\left[Y\mid\mathcal{F}_t\right],\ 0\leq t\leq T.$$

7. Antag

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,s)+\frac{\sigma^2 s^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(t,s)+rs\frac{\partial v}{\partial s}(t,s)-rv(t,s)=0$$

och

$$dS(t)=S(t)(rdt+\sigma dW^\lambda(t)).$$

a) Visa att

$$d(e^{-rt}v(t,S(t)))=\sigma e^{-rt}v'_s(t,S(t))S(t)dW^\lambda(t).$$

b) Antag $T>0$ och $v(T,s)=g(s)$, där $g\in\mathcal{P}$. Visa att

$$E\left[\int_0^T (v'_s(t,S(t))S(t))^2dt\right]<\infty.$$

Reservuppgift: Visa med hjälp av Itôs lemma att

$$H_n(W(t),t)=n\int_0^t H_{n-1}(W(s),s)dW(s),\ n=1,2,\ldots.$$