FINANSIELLA DERIVAT OCH STOKASTISK ANALYS (CTH$[TMA285]$, GU $[MAM695]$)
PER VECKA 7

1. (Black-Scholes modell) Antag $0 < T_0 < T$ och $\alpha > 0$. Ett finansiellt derivat ger innehavaren beloppet $S(T_0) - \alpha S(0)$ vid tiden T_0 om $S(T_0) - \alpha S(0) > 0$. I motsatt fall erhåller innehavaren vid tiden T_0 en köpoption i aktien med slutdagen T och lösenpriset $\alpha S(T_0)$. Bestäm derivatets värde vid tiden 0.

I de följande två övningarna förutsätts Black-Scholes modell. Det antags att $\mathcal{F}_t$ är den σ-algebra som genereras av nollmängderna och aktiepriset t o m tiden t. Om $(X(t),\ \mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T}$ är en martingal med avseende på det underliggande sannolikhetsrummet $(\Omega,\ \mathcal{F}_T, Q)$ sägs processen $(X(t))_{0 \le t \le T}$ vara en Q-martingal.

2. En portföljstrategi bestående av $h_S(t)$ aktier och $h_B(t)$ obligationer vid tiden $t \in [0, T]$ sägs vara en tillåten självfinansierande strategi om portföljvärdet
$$v(t) = h_S(t)S(t) + h_B(t)B(t)$$
uppfyller ekvationen
$$dv(t) = h_S(t)dS(t) + h_B(t)dB(t)$$
i intervallet $0 \le t \le T$ där h_S och att h_B är progressivt mätbara och
$$E^Q\left[\int_0^T (h_S(t)S(t))^2 dt\right] < \infty$$
och
$$\int_0^T \mid h_B(t) \mid dt < \infty \text{ n.s. } [P]$$

a) Visa att

$$d(e^{-rt}v(t)) = \sigma e^{-rt} h_S(t) S(t) dW^\lambda(t)$$

och dra slutsatsen att den diskonterade värdeprocessen $(e^{-rt}v(t))_{0\leq t\leq T}$ är en Q-martingal.

b) Visa att det inte kan inträffa att

$$v(0) = 0,\ v(T) \geq 0 \ \text{ n.s. } [P]$$

och

$$E[V(T)] > 0.$$

3. Antag $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$ och

$$Y = E^Q[Y] + \int_0^T f(t) dW^\lambda(t)$$

där f är progressivt mätbar och

$$E^Q\left[\int_0^T f^2(t)dt\right] < \infty.$$

(Itôs representationssats garanterar en sådan representation av godtyckligt $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$.) Visa att det finns en tillåten självfinansierande strategi som har värdeprocessen

$$v(t) = e^{-r(T-t)} E^Q[Y \mid \mathcal{F}_t],\ 0 \leq t \leq T.$$

4. Låt f :$\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ vara en begränsad kontinuerlig funktion och γ:$\mathbf{R}\rightarrow [0, \infty[$ mätbar funktion. Antag

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(t,x) + \alpha\frac{\partial v}{\partial x}(t,x) - \gamma(x)v(t,x) = 0,\ t < T,\ x \in \mathbf{R}$$

och

$$v(T,x) = f(x),\ x \in \mathbf{R}.$$

Feynman-Kac lösning ges av

$$v(t,x) = E\left[f(X(T))e^{-\int_t^T \gamma(X(s))ds} \mid X(t) = x\right]$$

där
$$dX(t) = \alpha dt + \sigma dW(t),\ 0 \leq t \leq T.$$

Låt $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, och $n \in \mathbf{N}$ och sätt

$$\gamma = \gamma_n = n1_{]-\infty,a[\cup]b,\infty[}.$$

Försök (genom att låta $n \to \infty$) motivera att ekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(t,x) + \alpha\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0,\ t < T,\ a < x < b$$

med randvillkoret

$$u(x,t) = 0 \text{ om } x = a \text{ eller } b$$

och slutvillkoret
$$u(T,x) = f(x),\ x \in \mathbf{R}$$

löses av funktionen

$$u(t,x) = E\left[f(X(T))1_{[a<X(s)<b \text{ alla } t\leq s\leq T]} \mid X(t) = x\right].$$

5. (Black-Scholes modell) Antag $-\infty < A < S(0) < B < \infty$. Ett finansiellt derivat av europeisk typ ger innehavaren beloppet R slutdagen T om
$$A < S(t) < B \text{ alla } t \in [0,T]$$
och i annat fall utbetalas ingenting. Beräkna derivatets värde vid tiden 0.

Reservtal: Ej tidigare behandlade räkneövningsuppgifter.