MATEMATIK
FINANSIELLA DERIVAT OCH STOKASTISK ANALYS
(CTH$[TMA285]$, **GU** $[MAM695]$**)**
Skrivningsdag: 17 dec 2001, kl $8^{45} - 12^{45}$ *Lokal*: ML6 *Hjälpmedel:* Beta
Telefonvakt: Christer Borell, tel 031-92 18 93
OBS: Text på 2 sidor!

---

1. (3p) (Bachelier-Samuelsons modell) Antag

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)),\ 0 \leq t \leq T$$

och

$$R = \frac{S(T)}{S(0)} - 1.$$

Visa att

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \ln(1 + \frac{\mathrm{Var}(R)}{(1 + E[R])^2}).$$

Lösning: Det gäller att

$$S(T) = S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W(T)}$$

och

$$R = e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W(T)} - 1.$$

Alltså är

$$E[R] = e^{\mu T} - 1$$

och

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(R) &= E\left[(e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W(T)} - e^{\mu T})^2\right] \\ &= e^{(2\mu + \sigma^2)T} - e^{2\mu T}.\end{aligned}$$

Härav följer att

$$1 + \frac{\mathrm{Var}(R)}{(1 + E[R])^2} = e^{\sigma^2 T}$$

och

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \ln(1 + \frac{\mathrm{Var}(R)}{(1 + E[R])^2})$$

vilket skulle visas.

2. (3p) Antag $(W(t))_{t\geq 0}$ är en normaliserad Wienerprocess i $\mathbf{R}^n$ och definiera

$$f(t,\omega)=e^{|W(t,\omega)|^2},\ 0\leq t\leq T,\ \omega\in\Omega.$$

Antag också att $p\in[1,\infty[$ och $T=\frac{1}{2p}$. Visa att $f\in\mathcal{L}^p[0,T]$ om och endast om $n=1$.

Lösning: Låt $W(t)=(W_1(t),...,W_n(t))$, $t\geq 0$, vara en normaliserad Wienerprocess i $\mathbf{R}^n$. Funktionen f är progressivt mätbar och för $t<T$ gäller att

$$E\left[e^{p|W(t)|^2}\right]=E\left[e^{pW_1(t)^2+...+pW_n(t)^2}\right]=E\left[e^{pW_1(t)^2}\cdot...\cdot e^{pW_n(t)^2}\right]$$

$$=(E\left[e^{pW_1(t)^2}\right])^n=(E\left[e^{p(\sqrt{t}W_1(1))^2}\right])^n=(\int_{-\infty}^{\infty}e^{ptx^2-\frac{1}{2}x^2}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}})^n$$

$$=(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(1-2pt)x^2}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}})^n=\frac{1}{\sqrt{1-2pt}^n}.$$

Vidare är

$$\int_0^T\frac{dt}{\sqrt{1-2pt}^n}=\frac{1}{2p}\int_0^1\frac{ds}{s^{\frac{n}{2}}}<\infty \text{ om och endast om } n=1,$$

vilket visar påståendet.

3. (3p) (Black-Scholes modell) Antag $0<T_0<T$ och $\alpha>0$. Ett finansiellt derivat av europeisk typ ger innehavaren beloppet

$$\max(0,S(T)-\alpha S(T_0))$$

slutdagen T. Bestäm derivatets pris vid en godtycklig tidpunkt t i intervallet $[0,T]$. Beskriv också en hedging av derivatet i tidsintervallet $[0,T]$.

Lösning: Beteckna derivatets pris vid tiden t med $v(t,S(t))$. Antag först $T_0\leq t<T$ och sätt $K=\alpha S(T_0)$. Vi får att

$$v(t,S(t))=S(t)\Phi(\frac{\ln\frac{S(t)}{K}+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}})$$

$$-Ke^{-r(T-t)}\Phi(\frac{\ln\frac{S(t)}{K}+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}})$$

$$= S(t)\Phi(\frac{\ln \frac{S(t)}{\alpha S(T_0)} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}})$$

$$-B(t)\frac{\alpha S(T_0)}{B(0)}e^{-rT}\Phi(\frac{\ln \frac{S(t)}{\alpha S(T_0)} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}).$$

Dessutom gäller att

$$h_S(t) = v'_s(t, S(t)) = \Phi(\frac{\ln \frac{S(t)}{\alpha S(T_0)} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}})$$

och

$$h_B(t) = -\frac{\alpha S(T_0)}{B(0)}e^{-rT}\Phi(\frac{\ln \frac{S(t)}{\alpha S(T_0)} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}).$$

Notera att

$$v(T_0, S(T_0)) = aS(T_0)$$

där

$$a = \Phi(\frac{\ln \frac{1}{\alpha} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-T_0)}{\sigma\sqrt{T-T_0}}) - \alpha e^{-r(T-T_0)}\Phi(\frac{\ln \frac{1}{\alpha} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-T_0)}{\sigma\sqrt{T-T_0}}).$$

Om $0 \leq t < T_0$ följer nu att

$$v(t, S(t)) = aS(t)$$

varför

$$h_S(t) = a$$

och

$$h_B(t) = 0.$$

4. (3p) (Black-Scholes modell, $n = 2$) Ett finansiellt derivat av europeisk typ ger innehavaren beloppet

$$\max(0, S_1(T) - S_2(T))$$

slutdagen T, där $T > 0$. Visa att derivatets teoretiska pris vid tiden $t \in [0, T[$ är strikt större än $\max(0, S_1(t) - S_2(t))$.

Lösning: Med standardbeteckningar gäller att

$$S_1(t) - S_2(t) = e^{-r(T-t)}E^Q\left[S_1(T) - S_2(T) \mid \mathcal{F}_t\right]$$

$$= e^{-r(T-t)} E^Q \left[s_1 e^{r(T-t)+\sigma_1 (W^\lambda(T) - W^\lambda(t))} - s_2 e^{r(T-t)+\sigma_2 (W^\lambda(T) - W^\lambda(t))} \right]$$
$$= e^{-r(T-t)} E^Q \left[s_1 e^{r(T-t)+\sigma_1 W^\lambda(T-t)} - s_2 e^{r(T-t)+\sigma_2 W^\lambda(T-t)} \right]$$
$$= e^{-r(T-t)} E^Q [X]$$

där $s_1 = S_1(t)$, $s_2 = S_2(t)$ och

$$X = s_1 e^{r(T-t)+\sigma_1 W^\lambda(T-t)} - s_2 e^{r(T-t)+\sigma_2 W^\lambda(T-t)}.$$

Härav följer att

$$S_1(t) - S_2(t) \leq e^{-r(T-t)} E^Q [\max(0, X)]$$

där högra ledet är lika med derivatets pris vid tiden t. Likhet inträffar om och endast om

$$E^Q [X] = E^Q [\max(0, X)] .$$

Men $X = \max(0, X) - \max(0, -X)$ så det följer att

$$E^Q [\max(0, -X)] = 0$$

och $\max(0, -X) = 0$ n.s. Detta innebär att $X \geq 0$ n.s. dvs

$$(\sigma_1 - \sigma_2) W^\lambda(T-t) \geq \ln \frac{s_2}{s_1} \text{ n.s.}$$

vilket är möjligt endast om den Gaussiska variabeln $(\sigma_1 - \sigma_2) W^\lambda(T-t)$ har variansen 0 relativt Q varför $\mid \sigma_1 - \sigma_2 \mid^2 (T-t) = 0$ eller $\sigma_1 = \sigma_2$. Den (2×2)- matris som har σ_1 och σ_2 som rader är dock icke-singulär, vilket är en motsägelse. Alltså är

$$E^Q [X] < E^Q [\max(0, X)] .$$

Om

$$0 = E^Q [\max(0, X)]$$

följer att $X \leq 0$ n.s. och vi får en motsägelse som ovan. Alltså är

$$\max(0, E^Q [X]) < E^Q [\max(0, X)]$$

vilket visar påståendet.

5. (3p) Antag $(W(t))_{t\geq 0}$ är en normaliserad reellvärd Wienerprocess. Visa att processen
$$(e^{\sigma W(t)-\frac{\sigma^2}{2}t})_{t\geq 0}.$$
är en Wienermartingal.

6. (4p) (Hull-Whites modell) Den korta räntan $r(t)$ löser ekvationen
$$dr(t) = (\Theta(t) - ar(t))dt + \sigma dW(t),\ \ 0 \leq t \leq T$$
där $(W(t))_{0\leq t\leq T}$ är en normaliserad reellvärd Wienerprocess relativt martingalmåttet Q. Här är a och b är positiva konstanter och $\Theta(t)$ en deterministisk funktion. Bestäm det teoretiska priset vid tiden 0 för en nollkuponsobligation som ger innehavaren beloppet 1 vid tiden T.

7. (2p+2p) (Black-Scholes modell, n godtyckligt) a) Härled Black-Scholes differentialekvation. b) Härled med hjälp av Feynman-Kac formel en prisformel för ett enkelt derivat av europeisk typ med slutdagen T.