MATEMATIK, Chalmers och Göteborgs universitet
Tentamen i **Finansiella derivat och stokastisk analys** (CTH-TMA285) (GU-MAM695)
13 december 2003, 8.45 till 13.45 på V.
Telefonvakt: Axel Målqvist, 0740-459022. Hjälpmedel: Beta.

---

1. Bestäm alla (om det finns några) reella a, b, c och d så att
$$W^3(t) + (at + b)W^2(t) + (ct + d)W(t)$$
blir en martingal.

2. (3p) Lös följande stokastiska differentialekvation för $0 \le t < T$ där $X(0) = 0$
$$dX(t) = \frac{X(t)}{T - t}\,dt + dW(t).$$
Låt $V(t)$ beteckna variansen av $X(t)$. Bestäm $V(t)$ samt visa att $2V(\frac{s+t}{2}) < V(s) + V(t)$ då $s, t \in (0, T)$.

3. (3p) Antag att värdet på en aktien är $S(t) = W(t)$ och för en obligation $B(t) \equiv B(0) = 1$. Låt oss använda finanseringsstrategin $(\phi(t), \psi(t)) = (2W(t), -t - W^2(t))$ för en portfölj som vid tiden t innehåller $\phi(t)$ aktier och $\psi(t)$ obligationer. Visa att strategin är självfinansierande.

4. (3p) Ett kontrakt ger köparen R kr vid tiden τ, där
$$\tau = \inf_t [t > 0;\ W(t) \ge 1],$$
där $W(t)$ är en normaliserad Wienerprocess. Vi antar också att vi har konstant ränta r. Vad är det förväntade (med avseende på det "fysikaliska" måttet) värdet av detta kontrakt?

5. (3p) Visa att kurvan $(t, W(t))$, där $0 \le t \le 1$, har oändlig längd.

6. (4p) (Vasičeks modell) Antag att den korta räntan, $r(t)$, uppfyller
$$dr(t) = (b - a\,r(t))\,dt + \sigma\,dW(t), \quad 0 \le t \le T,$$
där a och b är positiva konstanter, σ en konstant volatilitet och $(W(t))_{t \ge 0}$ en normaliserad reellvärd Wienerprocess relativt martingalmåttet Q. Bestäm det teoretiska priset vid tiden $t = 0$ för en nollkupongsobligation som ger innehavaren beloppet 1 vid tiden T.

7. (4p) (Feynman-Kacs formel) Antag att $u(x, t)$ löser följande paraboliska slutvärdesproblem
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2(t,x)}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + b(t,x)u(t,x) = 0,\ 0 \le t < T,\ x \in \mathbb{R} \\ u_{|t=T} = f \end{cases}$$
och antag att $X(t)$ är en lösning den stokastiska differentialekvationen
$$dX(t) = a(t, X(t))\,dt + \sigma(t, X(t))\,dW(t),\ 0 \le t \le T.$$
Visa (med hjälp av Itôkalkyl) att under lämpliga regularitetsvillkor (vilka?) gäller följande:
$$u(0, x) = E[f(X(T))e^{\int_0^T b(s,X(s))\,ds}|X(0) = x].$$

(Två formler på baksidan →)

FORMLER

- Antag att $X(t) = \alpha t + \sigma W(t),\ 0 \leq t \leq T$, där $(W(t))_{0 \leq t \leq}$ är en reellvärd normaliserad Wienerprocess, $\alpha \in \mathbb{R}$ och $\sigma > 0$. Då är

$$P\left[\max_{0 \leq t \leq T} X(t) < x\right] = \Phi\left(\frac{x - \alpha T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{\frac{2\alpha x}{\sigma^2}}\,\Phi\left(-\frac{x + \alpha T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

  för varje $x > 0$.

- Om $a, b > 0$ är

$$\int_0^\infty \frac{1}{t^{3/2}\, e^{at + b/t}}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-2\sqrt{ab}}.$$