

## Lösningar till udda uppgifter i övningsexempel PDE

1. a) Variationsformulering av

$$-u'' = f, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = 0 :$$

Finn  $u \in V = \{v(x) : v(0) = 0, \int_0^1 [v^2 + (v')^2] dx < \infty\}$  så att

$$\int_0^1 u'v' dx = \int_0^1 f v dx, \quad \forall v \in V.$$

b) Apriori feluppskattning. Se boken.

c) Aposteriori feluppskattning. Se boken.

3. Utgår från d'Alemberts formel

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \{u_0(x-t) + u_0(x+t)\} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} v_0(s) ds.$$

a) Finner att  $u(x, 2) = 1$  för  $x < -2$ ,  $u(x, 2) = \frac{1}{2}$  för  $-2 < x < 2$  och  $u(x, 2) = 0$  för  $x > 2$ , se figur.

b) Finner att  $u(x, 2) = \frac{1}{2}(-x-3)$  för  $-3 < x < -2$ ,  $u(x, 2) = \frac{1}{2}(x+1)$  för  $-2 < x < -1$ ,  $u(x, 2) = \frac{1}{2}(x-1)$  för  $1 < x < 2$ ,  $u(x, 2) = \frac{1}{2}(3-x)$  för  $2 < x < 3$ ,  $u(x, 2) = 0$  för övrigt, se figur 3b.

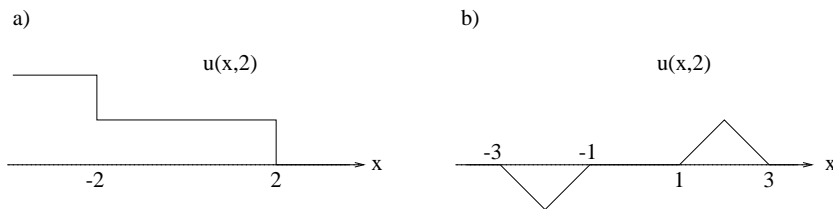


Figure 1:

c) En lösning (finns fler) skulle kunna vara  $u_0(x) = 1$  för  $1+8n < x < 3+8n$  och  $-(3+8n) < x < -(1+8n)$ ,  $u_0(x) = -1$  för  $5+8n < x < 7+8n$  och  $-(7+8n) < x < -(5+8n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $u_0(x) = 0$  för övrigt, se figur 3c.

5. a) Multiplikation med  $u$  och integration i  $x$ -led ge

$$\begin{aligned} \int_0^1 \dot{u} u dx - \epsilon \int_0^1 u'' u dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \epsilon \|u'\|^2 - u'(1)u(1) + u'(0)u(0) \\ &= \|u\| \frac{d}{dt} \|u\| + \epsilon \|u'\|^2 = \int_0^1 f u dx \leq \|f\| \|u\|, \end{aligned}$$

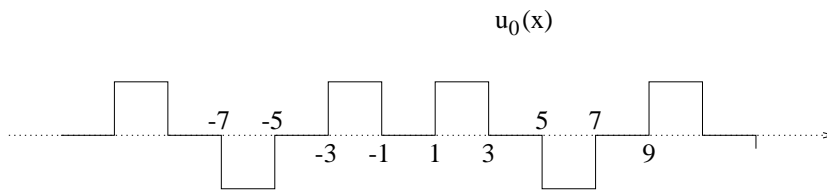


Figure 2:

dvs  $\frac{d}{dt}\|u\| \leq \|f\|$  som efter integration i  $t$ -led ger den sökta olikheten, eftersom  $u = 0$  för  $t = 0$ .

- b) Multiplikation med  $u$  och integration i  $x$ -led med  $\dot{u} = 0$  (även sista led i a)) ger

$$\epsilon \|u'\|^2 \leq \|f\| \|u\|.$$

Vi utnyttjar nu Poincaré olikheten  $\|u\| \leq \|u'\|$  och förkortar med  $\|u'\|$  vilket ger den sökta olikheten. Poincaréolikheten följer av att  $u(x) = \int_1^x u'(s)ds$ , eftersom ju  $u(1) = 0$ .

7. a) Ekvationerna beskriver hur temperaturen  $u$  utvecklas med tiden  $t$  i ett (endimensionellt) område  $0 < x < 1$  med given värmeproduktion  $f$  med randvillkoren att  $u = 0$  vid  $x = 0$  och att värmeflödet  $q$  hålls  $=0$  (isolering) vid  $x = 1$ .  $a$  är konduktiviteten.
- b) Ekvationen  $q = -au'$  uttrycker att värmeflödet är proportionellt mot temperaturfallet per längdenhet, med en proportionalitetskonstant  $a$  som beror på det värmeledande mediet ifråga. Ekvationen för  $\dot{u}$  erhålls genom att betrakta ett godtyckligt intervall  $(a, b)$  i vilket tillförd värme per tidsenhet  $= \int_a^b f dx + q(a, t) - q(b, t) = \int_a^b f dx - \int_a^b q' dx$  måste vara lika med accurmulerad värme per tidsenhet  $= \frac{d}{dt} \int_a^b u dx = \int_a^b \dot{u} dx$ . Eftersom intervallet var godtyckligt måste gälla att  $\dot{u} = f - q'$  för alla  $0 < x < 1$ .
- c) Betraktar ett fall med två rumsdimensioner med koordinater  $x, y$ . Värmeflödet ges nu av  $q = -a\nabla u = -a\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$  och motsvarande randvillkor övergår i  $q \cdot n = 0$ , där  $n$  är en given normalvektor till randen för det aktuella området. Själva värmeledningsekvationen blir  $\dot{u} = f - \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial u}{\partial y}\right)$  kortare skrivet som  $\dot{u} = f - \nabla \cdot (a\nabla u)$ .

9. a)

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1, \quad \text{i } \Omega \\ u &= 0, \quad \text{på } \Gamma \end{aligned} \tag{1}$$

Multiplisera (1) med  $v \in H_0^1(\Omega)$  och integrera:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} v$$

*Variationsformulering:*

Finn  $u \in H_0^1(\Omega)$  s.a.  $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} v, \forall v \in H_0^1(\Omega).$

*FEM:* Finn  $U \in V_h^0$  s.a.

$$\text{Finn } U \in V_h^0 \text{ s.a.} \quad \int_{\Omega} \nabla U \cdot \nabla v = \int_{\Omega} v, \forall v \in V_h^0 \tag{2}$$

$V_h^0 = \{v : v \text{ styckvis linjär och kontinuerlig på } \Omega, v \equiv 0 \text{ på } \Gamma\}$  på trianguleringen i figur 9a:

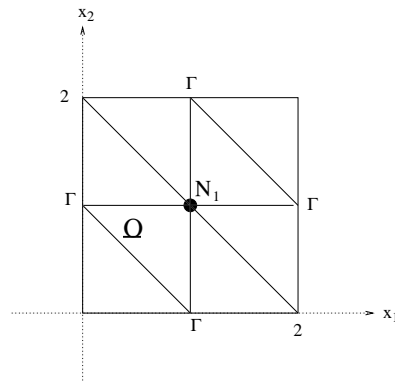


Figure 3:

En bas för  $V_h^0$  utgörs av  $\{O_i\}_{i=1}^1$ , där  $O_1 \in V_h^0$ ,  $O_1(N_1) = 1$ .

Ansätt

$$U = \xi_1 O_1 \tag{3}$$

(2) är ekvivalent med: Finn  $U \in V_h^0$  s.a.

$$\int_{\Omega} \nabla U \cdot \nabla O_1 = \int_{\Omega} O_1 \tag{4}$$

Insättning av (3) i (4) ger

$$\xi_1 \int_{\Omega} \nabla O_1 \cdot \nabla O_1 = \int_{\Omega} O_1$$

$$\underline{\underline{a_{11}\xi_1 = b_1}}$$

$$a_{11} = \int_{\Omega} \nabla O_1 \cdot \nabla O_1 = \dots = 4, \quad b_1 = \int_{\Omega} O_1 = G \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{3} = 1$$

**Svar:** Styvhetsmatris :  $A = [a_n] = [4]$   
 Lastvektor :  $b = [b_1] = [1]$

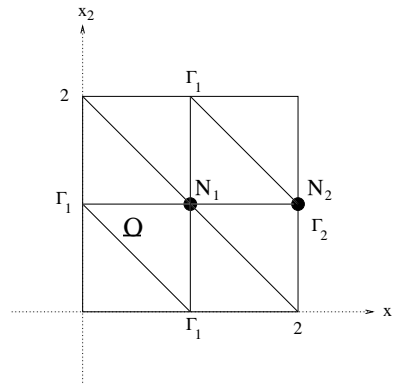


Figure 4:

Def:  $V = \{v : v \in H^1(\Omega), v \equiv 0 \text{ på } \Gamma_1\}$

Multipliser (1) med  $v \in V$  och integrera:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} v,$$

ty  $v \equiv 0$  på  $\Gamma_1$  och  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  på  $\Gamma_2$ .

*Variationsformulering:*

Finn  $u \in V$  s.a.  $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} v, \quad \forall v \in V.$

*FEM:*

$$\text{Finn } U \in V_h \text{ s.a.} \quad \int_{\Omega} \nabla U \cdot \nabla v = \int_{\Omega} v, \quad \forall v \in V_h \quad (5)$$

( $V_h = \{v : v \text{ styckvis linjär och kontinuerlig på } \Omega, v \equiv 0 \text{ på } \Gamma_1\}$ , på trinaguleringen i fig 9b).

En bas för  $V_h$  utgörs av  $\{O_i\}_{i=1}^2$ , där  $O_i \in V_h, i = 1, 2$  samt  $O_i(N_j) = \delta_{ij}, i, j = 1, 2.$

Nu är (5) ekvivalent med:

$$\text{Finn } U \in V_h \text{ s.a. } \int_{\Omega} \nabla U \cdot \nabla O_i = \int_{\Omega} O_i, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

Ansätt  $U = \sum_{j=1}^2 \xi_j O_j$ . Insättning i (6) ger

$$\sum_{j=1}^2 \xi_j \underbrace{\int_{\Omega} \nabla O_j \cdot \nabla O_i}_{a_{ij}} = \underbrace{\int_{\Omega} O_i}_{b_i}, \quad i = 1, 2$$

$$\underline{\underline{A\xi = b}}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \int_{\Omega} O_1 = 1, \quad b_2 = \int_{\Omega} O_2 = \frac{1}{2} \\ a_{11} &= \int_{\Omega} \nabla O_1 \cdot \nabla O_1 = 4, \quad a_{22} = \int_{\Omega} \nabla O_2 \cdot \nabla O_2 = 2, \\ a_{12} &= a_{21} = \int_{\Omega} \nabla O_1 \cdot \nabla O_2 = -1 \end{aligned}$$

**Svar:** Styvhetsmatris:  $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$   
 Lastvektor:  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

11. a) Metoden bygger på att

$$\int_a^b \int_0^1 u v dx dt + \epsilon \int_a^b \int_0^1 u' v' dx dt = \int_a^b f v dx dt,$$

för  $v$  sådana att  $v(1, t) = 0$ . Ansätter för  $t_{n-1} \leq t \leq t_n$  en approximativ lösning

$$U(x, t) = U_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} U_{n,j} \phi_j(x),$$

där  $\phi_j$  är den kontinuerliga styckvis linjära hattfunktionen som är = 1 i noden  $x_j = j/m$  och = 0 i övriga noder. Söker sedan (med givna  $\epsilon$  och  $f$ )  $U_{n,j}$  sådana att

$$\int_0^1 (U_n - U_{n-1}) \phi_i dx + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_0^1 U_n' \phi_i' dx dt = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_0^1 t \phi_i dx dt,$$

dvs vektorn  $U_n = \{U_{n,j}\}$  sådan att  $MU_n + SU_n = MU_{n-1} + B$ , där  $M$  är den tridiagonala massmatrisen med element  $2h/3$  på diagonalen, med undantag av det första diagonalelementet som blir  $h/3$  motsvarande en halv hatt, samt  $h/6$  på sub- och superdiagonalerna, och där styvhetsmatrisen  $S$  har element  $2/h$  på diagonalen, med undantag av det första som blir  $1/h$ , samt  $-1/h$  på sub- och superdiagonalerna. Vektorn  $B$  har elementen  $\int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_0^1 t\phi_i dx dt = k \frac{t_{n-1} + t_n}{2} = (t_n^2 - t_{n-1}^2)h$ , där  $k = t_n - t_{n-1}$  är tidssteget, och  $h = 1/m$  är rumssteget. Det första elementet i  $B$  är hälften så stort motsvarande en halv hatt.

- b) Koefficienten  $U_{n,0}$  i ansatsen är nu känd och är  $=7$ . Dvs en 7-multipel av första kolonerna i matriserna  $M$  och  $S$  kan subtraheras från båda led, varefter första ekvationen kan stryckas.
13. a) Låt  $\varphi_1, \varphi_2$  vara de styckvis linjära kontinuerliga basfunktionerna som är  $=1$  i nod 1 resp. 2 och  $=0$  i övriga noder. Söker  $U = u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2$  så att

$$\int_{\Omega} \nabla U \cdot \nabla \varphi_i = \int_{\Omega} f \varphi_i \quad i = 1, 2.$$

Beräknar

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_1 &= \int_{A \cup B \cup C \cup D \cup \dots} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_1 \\ &= \int_{A \cup B} (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + \int_{C \cup D} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + \dots \\ &= 4 \end{aligned}$$

Analogt,

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_2 = \int_{\Omega} \nabla \varphi_2 \cdot \nabla \varphi_1 = \int_A (-1) \cdot 1 + 0(-1) + \int_B (-1)1 + 0 \cdot 1 = -1$$

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_2 \cdot \nabla \varphi_2 = \int_{A \cup B} \underbrace{\nabla \varphi_2 \cdot \nabla \varphi_2}_{=2} + \int_{\text{Resten}} \underbrace{\nabla \varphi_2 \cdot \nabla \varphi_2}_{=1} = 4$$

$$\int_{\Omega} f \varphi_1 = \int_{D \cup E \cup F \cup G} \varphi_1 + 2 \int_{H \cup A \cup B \cup C} \varphi_1 = \frac{2}{3} + 2 \frac{2}{3} = 2$$

$$\int_{\Omega} f \varphi_2 = 2 \cdot \frac{3}{3} = 2$$

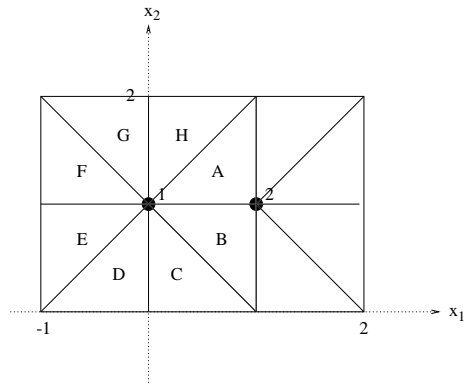


Figure 5:

$$\text{Styvhetismatris} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Lastvektor.}$$

b) Tillkommer basfunktion  $\varphi_3$  (=1 i nod 3, =0 i övriga).

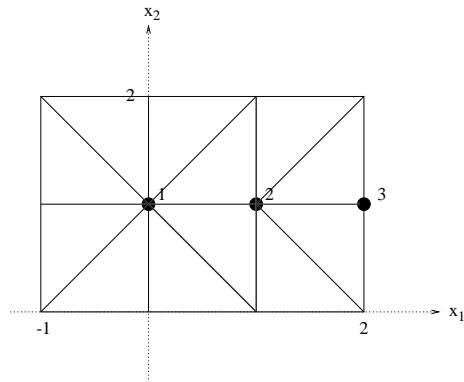


Figure 6:

$$\text{Beräknar } \int_{\Omega} \nabla \varphi_3 \cdot \nabla \varphi_3 = 2, \int_{\Omega} \nabla \varphi_2 \cdot \nabla \varphi_3 = \int_{\Omega} \nabla \varphi_3 \cdot \nabla \varphi_2 = -1,$$

$$\int_{\Omega} f \varphi_3 = 2 \cdot \frac{1}{3}$$

$$\text{Styvhetismatris: } \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

15. Metoden bygger på att

$$\int_a^b \int_0^1 \dot{u}v dxdt + \int_a^b \int_0^1 (u'v' + uv) dxdt = \int_a^b 20v dxdt,$$

för  $v$  sådana att  $v(0, t) = 0$ . Ansätter för  $t_{n-1} \leq t \leq t_n$  en approximativ lösning

$$U(x, t) = U_{n-1}(x)\psi_{n-1}(t) + U_n(x)\psi_n(t),$$

$$U_n(x) = \sum_{j=1}^m U_{n,j}\phi_j(x),$$

där  $\psi_n$  och  $\phi_j$  är de kontinuerliga styckvis linjära hattfunktionerna i  $t$ - resp  $x$ -led som är  $=1$  i noden  $t_n$  resp  $x_j = j/m$  och  $=0$  i övriga noder. Söker sedan  $U_{n,j}$  sådana att

$$\int_{I_n} \int_0^1 \dot{U}\phi_i dxdt + \int_{I_n} \int_0^1 (U'\phi_i' + U\phi_i) dxdt = \int_{I_n} \int_0^1 20\phi_i dxdt,$$

dvs vektorn  $U_n = \{U_{n,j}\}$  sådan att

$$MU_n - MU_{n-1} + \frac{k}{2}S(U_n + U_{n-1}) + \frac{k}{2}M(U_n + U_{n-1}) = B,$$

dvs  $(M + \frac{k}{2}S + \frac{k}{2}M)U_n = (M - \frac{k}{2}S - \frac{k}{2}M)U_{n-1} + B$ , där  $M$  är den tridiagonala massmatrisen med element  $2h/3$  på diagonalen, med undantag av det sista diagonalelementet som blir  $h/3$  motsvarande en halv hatt, samt element  $h/6$  på sub- och superdiagonalerna, och där styvhetsmatrisen  $S$  har element  $2/h$  på diagonalen, med undantag av det sista diagonalelementet som blir  $1/h$ , samt element  $-1/h$  på sub- och superdiagonalerna. Vektorn  $B$  har elementen  $B_i = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_0^1 20\phi_i dxdt = 20kh$  resp  $B_m = 10kh$ , där  $k = t_n - t_{n-1}$  är tidssteget,  $I_n = (t_{n-1}, t_n)$  och  $h = 1/m$  är rumssteget.

17. a) Vi har att

$$\|\Delta u\|^2 = \int_{\Omega} u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + 2u_{xx}u_{yy}.$$

Partiell integration först i  $y$ -led och sedan i  $x$ -led ger

$$\int_{\Omega} u_{xx}u_{yy} = \int_{\Gamma} u_{xx}u_y n_y - \int_{\Omega} u_{xxy}u_y = \int_{\Gamma} u_{xx}u_y n_y - \int_{\Gamma} u_{xy}u_y n_x + \int_{\Omega} u_{xy}u_{xy}.$$

där  $n = (n_x, n_y)$  är den yttre enhetsnormalen till randen. På den del av randen där  $n_y \neq 0$  (tak och golv) gäller  $u_{xx} = 0$ , eftersom  $u = 0$ , och så den del av randen där  $n_x \neq 0$  gäller  $u_y = 0$  av samma skäl. Detta ger alltså att  $\int_{\Omega} u_{xx}u_{yy} = \int_{\Omega} u_{xy}u_{xy}$  vilket ger den sökta identiteten.



- b) I fallet  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  på randen gäller där  $n_y \neq 0$  att  $u_y = 0$  och där  $n_x \neq 0$  att  $u_{xy} = 0$ , eftersom  $u_x = 0$  i  $y$ -led där. Alltså erhålles samma resultat.
- c) Vi har  $\|u\|^2 = \int_{\Omega} u^2 \Delta \phi = -2 \int_{\Omega} u \nabla u \cdot \nabla \phi \leq 2 \max_{\Omega} |\nabla \phi| \|u\| \|\nabla u\|$ , varifrån den önskade olikheten följer med  $C_{\Omega} + 2 \max_{\Omega} |\nabla \phi|$ .

19. Se boken.

21. a) Låt  $\varphi_1$  och  $\varphi_2$  vara basfunktionerna motsvarande de två inre noderna enl. figur 21a

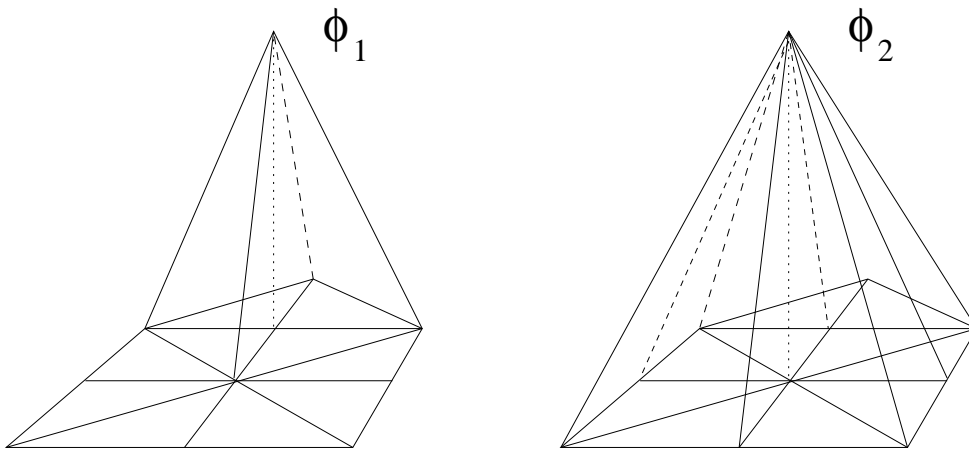


Figure 7:

Enligt formeln  $\frac{\text{basen} \times \text{höjden}}{3}$  för volymen av en kon erhålls

$$\int_{\Omega} \varphi_1 = \frac{2h}{3} \quad \& \quad \int_{\Omega} \varphi_2 = \frac{4h}{3}.$$

Beräknar  $\nabla \varphi_1$  och  $\nabla \varphi_2$  på resp. triangel och finner

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_1 = 4, \quad \int_{\Omega} \nabla \varphi_2 \cdot \nabla \varphi_2 = 4, \quad \int_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_2 = -1.$$

Dvs

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_i = \int_{\Omega} 1 \cdot \varphi_i \quad i = 1, 2$$

där  $u_h = U_1\varphi_1 + U_2\varphi_2$  kan nu skrivas

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \frac{2h^2}{3} \\ \frac{4h^2}{3} \end{bmatrix} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Styvhetismatris} & & \text{Lastvektor} \end{array}$$

b) För felet gäller nu

$$\|\nabla(u - u_h)\| \leq C_i \|hR\|,$$

där  $\|\cdot\|$  är  $L_2(\Omega)$ -normen,  $C_i$  en interpolation konstant,  $h$  elementstorleken, och

$R + |R_1| + R_2$  är residualen.

$R_1 = f + \Delta u_h$  på resp. triangel,  $R_2 = \max_{\partial K} \frac{|\nabla u_h|}{h_k}$ , där  $[\nabla u_h]$  är hoppet i  $\nabla u_h$  tvärs randen  $\partial K$  av triangel  $K$ .

c) För  $L_2$ -normsfelet gäller

$$\|u - u_h\| \leq C_i \|h^2 R\|.$$

d) för kvadratiska elementfunktioner gäller

$$\|\nabla(u - u_h)\| \leq C_i \|hR\|,$$

precis som för linjära, men  $R$  kan nu väntas vara mindre.

23. a) Utvidgar  $u_0$  och  $v_0$  udda, dvs sätter  $\tilde{u}_0(x) = -u_0(-x)$  för  $x < 0$ ,  $\tilde{u}(x) = u(x)$  för  $x > 0$ , analogt för  $v$ . d'Alemberts formel ger nu lösningen

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \{ \tilde{u}_0(x - ct) + \tilde{u}_0(x + ct) \} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{v}_0(s) ds \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \{ u_0(x - ct) + u_0(x + ct) \} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s) ds, & \text{för } x > ct, \\ \frac{1}{2} \{ -u_0(ct - x) + u_0(x + ct) \} + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} v_0(s) ds, & \text{för } x < ct. \end{cases} \end{aligned}$$

Finner speciellt att  $u(0, t) = \frac{1}{2} \{ -u_0(ct) + u_0(ct) \} + \frac{1}{2c} \int_{ct}^{ct} v_0(s) ds = 0$  som önskat.

- b) Ansätter (för  $x < ct$ ) modifierad lösning  $w(x, t) = u(x, t) + \phi(x - ct)$ , vilken vi vet löser ekvationen  $\ddot{w} = c^2 w''$ . Söker nu  $\phi$  så att  $w(0, t) = u(0, t) + \phi(-ct) = g(t)$ , dvs  $\phi(-ct) = g(t)$ , dvs  $\phi(s) = g(-s/c)$ . Lösningen modifieras alltså för  $x < ct$  till  $u(x, t) + g(t - x/c)$ .

25. a) Variationsformuleringen av problemet blir

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Gamma_N} gv,$$

för alla  $v$  sådana att  $v = 0$  på  $\Gamma_D$ . Subtraherar motsvarande relation för  $U$  och  $v \in V_h$  och erhåller felekvationen

$$\int_{\Omega} \nabla(u - U) \cdot \nabla v = 0,$$

för alla  $v \in V_h$ . Får nu

$$\begin{aligned} \|\nabla(u - U)\|^2 &= \int_{\Omega} \nabla(u - U) \cdot \nabla(u - U) = \int_{\Omega} \nabla(u - U) \cdot \nabla(u - v) \\ &\leq \|\nabla(u - U)\| \|\nabla(u - v)\|, \end{aligned}$$

för alla  $v \in V_h$ , varav den sökta olikheten följer.

- b) Visar  $\|(u - v)'\| \leq \|hu''\|$ . På delinterval  $i$  gäller  $(u - v)'(x) = \int_{\xi_i}^x (u - v)'' = \int_{\xi_i}^x u''$ , för någon punkt  $\xi_i$  i intervallet, enligt medelvärdesatsen. Det följer att

$$|(u - v)'(x)| \leq \int_{I_i} |u''| \leq \left( \int_{I_i} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{I_i} u''^2 \right)^{\frac{1}{2}} = h_i^{\frac{1}{2}} \left( \int_{I_i} u''^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

dvs

$$\int_{I_i} (u' - v')^2 \leq h_i^2 \int_{I_i} u''^2.$$

Summation över  $i$  ger

$$\|(u - v)'\|^2 \leq \|hu''\|^2,$$

vilket ger den sökta olikheten.

27. Istället för uppg. 27 i listan: Betrakta:

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f$$

där  $M$  är en positiv konstant

a) Antag att  $M < 1$ , lös ekvationen i  $R^2$  med  $f = g(x)\delta_0(y)$  där:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{för } |x| < 1, \\ 0 & \text{för } |x| \geq 1 \end{cases}$$

och  $\delta_0(y)$  är en deltafunktion.

Ledning: Elementärlösning till  $-\Delta$  ges i  $R^2$  av:

$$E(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}.$$

b) Antag att  $M > 1$ , lös ekvationen i övre halvplan ( $y > 0$ ) med  $f = 0$  och följande randvillkor

$$u = g(x), \quad \text{för } y = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \text{för } y = 0,$$

där  $g(x)$  är given i deluppgift (a).

c) Bevisa att  $E(x, y)$ , givet i ledningen till (a) är verkligen en elementärlösning till  $-\Delta$  i  $R^2$ .

Lösning: Betrakta

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f$$

a)  $M < 1$

Gör variabelbytet

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{1}{\sqrt{1-M^2}}x_1 \\ x'_2 = x_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} \frac{\partial}{\partial x'_1}, & \frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x'_2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} &= \frac{1}{1-M^2} \frac{\partial^2}{\partial x'^2_1}, & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x'^2_2} \\ &\Rightarrow \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2_2} &= f(x'_1, x'_2) \end{aligned}$$

där  $f(x'_1, x'_2) = g(x'_1)\delta(x'_2)$  och

$$g(x'_1) = \begin{cases} 1, & \text{för } |x'_1| < \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} \\ 0, & \text{för } |x'_1| > \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\Delta' u &= -f \\
\Rightarrow \\
u(z') &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} (-f(x')) \log \left( \frac{1}{|z' - x'|} \right) dx' = \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(x'_1) \log \left( \frac{1}{|(z'_1, z'_2) - (x'_1, 0)|} \right) dx'_1 = \\
&= +\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{1}{\sqrt{1-M^2}}}^{\frac{1}{\sqrt{1-M^2}}} \log \left( |(z'_1, z'_2) - (x'_1, 0)| \right) dx'_1
\end{aligned}$$

$$u(z'_1, z'_2) = u\left(\frac{z_1}{\sqrt{1-M^2}}, z_2\right) \text{ ger sedan } u = u(z_1, z_2).$$

b)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - (M^2 - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0$$

$$\text{Sätt } c = \sqrt{M^2 - 1}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0, & x_2 > 0 \\ u = g(x_1), & x_2 = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, & x_2 = 0 \end{cases}$$

d'Alemberts formel ger

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \left( g(x_1 - cx_2) + g(x_1 + cx_2) \right), \quad x_2 \geq 0$$

c) se boken.

29. Bevis: Se kurslitt.

$$a(v, w) = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, dx + \int_0^1 v(0, s) w(0, s) \, ds, \quad \Omega = (0, 1) \times (0, 1)$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad f \in L_2(\Omega)$$

$$V = H^1(\Omega)$$

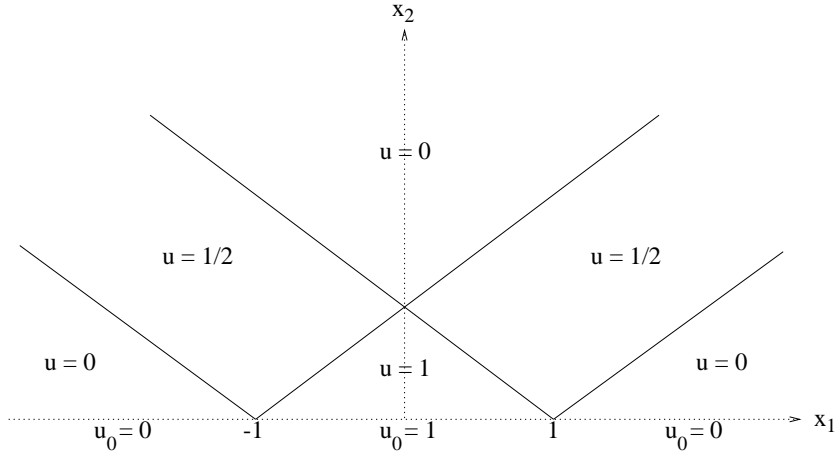


Figure 8:

$a(\cdot, \cdot)$  bilinjär och  $L(\cdot)$  linjär klart

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v^2 &= \int_0^1 \int_0^1 v(t, s)^2 ds dt = \int_0^1 \int_0^1 [v(0, s) + \int_0^t \frac{\partial v}{\partial t'}(t', s) dt']^2 ds dt \leq \\ &\leq 2 \left\{ \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 v(0, s)^2 ds dt}_{I_1} + \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 [\int_0^t \frac{\partial v}{\partial t'}(t', s) dt']^2 ds dt}_{I_2} \right\} \end{aligned}$$

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^1 v(0, s)^2 ds dt = \int_0^1 v(0, s)^2 ds$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \int_0^1 [\int_0^t \frac{\partial v}{\partial t'}(t', s) dt']^2 ds dt \leq \int_0^1 \int_0^1 [\int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t'}(t', s)^2 dt'] ds dt = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t'}(t', s)^2 dt' ds \leq \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v \\ &\therefore \int_{\Omega} v^2 \leq 2 \left( \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v + \int_0^1 v(0, s)v(0, s) ds \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{a(v, v)} &= \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v + \int_0^1 v(0, s)v(0, s) ds \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v + \frac{1}{4} \int_{\Omega} v^2 \geq \frac{1}{4} \|v\|_V^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |a(v, w)| &\leq \left| \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \right| + \left| \int_0^1 v(0, s)w(0, s) ds \right| \leq c - s \leq \\ &\leq \|v\|_V \|w\|_V + \left( \int_0^1 v(0, s)^2 ds \right)^{1/2} \left( \int_0^1 w(0, s)^2 ds \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Men  $v(t, s) = v(0, s) + \int_0^t \frac{\partial v}{\partial t'}(t', s) dt'$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} v(0, s)^2 &= 2 \left( v(t, s)^2 + \left[ \int_0^t \frac{\partial v}{\partial t'}(t', s) dt' \right]^2 \right) \leq c - s \leq \\ &\leq 2 \left( v(t, s)^2 + \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t'}(t', s)^2 dt' \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Integrera (8) från  $t = 0$  till  $t = 1$ :

$$v(0, s)^2 \leq 2 \left( \int_0^1 v(t, s)^2 dt + \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t'}(t', s)^2 dt' \right) \quad (9)$$

Integrera (9) från  $s = 0$  till  $s = 1$ :

$$\begin{aligned} \int_0^1 v(0, s)^2 ds &\leq 2 \left( \int_0^1 \int_0^1 v(t, s)^2 dt ds + \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t'}(t', s)^2 dt' ds \right) \leq \\ &\leq 2 \left( \int_{\Omega} v^2 + \int_{\Omega} \nabla v, \nabla v \right) = 2 \|v\|_V^2 \\ &\because \left( \int_0^1 v(0, s)^2 ds \right)^{1/2} \leq \sqrt{2} \|v\|_V \end{aligned}$$

(8) ger därmed att

$$\begin{aligned} |a(v, w)| &\leq \|v\|_V \|w\|_V + \sqrt{2} \|v\|_V \sqrt{2} \|w\|_V = 3 \|v\|_V \|w\|_V \\ |L(v)| &= \left| \int_{\Omega} f v dx \right| \leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} \leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_V \end{aligned}$$

$\therefore$  Förutsättningarna till Lax-Milgram är uppfyllda.

**MA**