TMA 401/MAN 670 Functional Analysis 2001/2002
Peter Kumlin
Matematiska institutionen CTH& GU

Lite om Fixpunktssatser

Vårt ständigt återkommande problem är att lösa ekvationer

$$T(u) = v,$$

där T är en avbildning mellan Banachrum X och Y, v ligger i Y och lösningen u ska sökas i X eller någon delmängd av X. Vi har sett att om T är en linjär avbildning kan man ofta hitta en **representationsformel** för lösningen, dvs vi har kunnat hitta en formel för den inversa avbildningen T^{-1}. Exempel på sådana problem är linjära rand- och begynnelsevärdesproblem, där representationsformeln för u ges av en faltning mellan v och en kärna (=Greenfunktionen). Liknande resultat fås för vissa integralekvationer.

Situation förändras dramatiskt om T är en icke-linjär avbildning. Detta gäller även om T är en (icke-linjär) operator[1] på ett Banachrum X. Det hör nu till undantagsfallen att man kan hitta en formel för lösningen u. Vad man kan hoppas på är att T har sådana avbildningsegenskaper att existensen av en lösning kan säkerställas.

I differential/integralekvationssammanhang kan ekvationen $T(u) = v$ ofta skrivas om på formen $u = G(u) + v$, där v är känd och u är sökt. Om vi betecknar högerledet med $H(u)$, dvs vi betraktar v som en fixerad parameter, tar problemet formen att söka en s.k. **fixpunkt** till operatorn H, dvs ett u_0 för vilket

$$H(u_0) = u_0.$$

Om G ovan är en linjär operator med liten operatornorm (i detta sammanhang $\|G\| < 1$) kan H^{-1} fås som en **Neumannserie** (se [4]). Om G ej är linjär ger denna teknik sällan någon användbar formel. I dessa situationer vi tillgriper fixpunktssatser.

De fixpunktssatser som vi kommer att diskutera är av två typer, dels satser för kontraktioner och dels satser för kompakta operatorer. Av dessa är den senare typen djupare resultat.

[1] I detta papper om fixpunktssatser låter vi termen operator stå för en godtycklig avbildning mellan ett Banachrum och sig självt. Vi förutsätter **inte** att avbildningen är linjär.

Låt oss som ett inledande exempel betrakta följande problem. Antag att

$$f : [0,1] \to \mathbf{R}$$

är en kontinuerlig funktion[2] med $f(0), f(1) \in [0,1]$. Existensen av ett $x_0 \in [0,1]$ sådant att $f(x_0) = x_0$ är en konsekvens av att

1. $[0,1]$ är en sammanhängande (=konvex) kompakt delmängd av ett fullständigt normerat rum, i detta fall $\mathbf{R}$,
2. f är en kontinuerlig avbildning definierad på $[0,1]$.

För att visa existensen av ett x_0 med den sökta egenskapen kan man argumentera på följande sätt: Betrakta funktionen $g(x) = x - f(x)$ definierad på intervallet $[0,1]$. Eftersom g är en kontinuerlig funktion, då f är kontinuerlig, och g uppfyller $g(0) \leq 0 \leq g(1)$ gäller enligt satsen om mellanliggande värden att det finnas (minst) ett $x_0 \in [0,1]$ sådant att $g(x_0) = 0$. Av detta följer att $f(x_0) = x_0$. Rita!

Vi noterar att argumentet för existensen av ett x_0 ovan inte gav någon information om var punkten x_0 ligger i intervallet $[0,1]$. Metoden är **icke-konstruktiv**. Vad man kan göra för att få information om x_0:s position är att använda **intervallhalveringsmetoden**. Antag nämligen att $g(0) < 0 < g(1)$ (om detta inte gäller har vi redan funnit ett x_0) och betrakta intervallen $[0, \frac{1}{2}]$ och $[\frac{1}{2}, 1]$. Om $g(\frac{1}{2}) = 0$ så gäller $x_0 = \frac{1}{2}$. Om $g(\frac{1}{2}) > 0$ eller $g(\frac{1}{2}) < 0$ kan vi använda metoden ovan på restriktionen av funktionen g till intervallet $[0, \frac{1}{2}]$ respektive $[\frac{1}{2}, 1]$. Resultatet är att det finns ett x_0 med sökta egenskapen i intervallet $[0, \frac{1}{2}]$ eller i andra fallet i intervallet $[\frac{1}{2}, 1]$. Vi kan nu upprepa proceduren genom att halvera det intervall där vi vet att ett nollställe till g finns. På detta sätt kan läget av en fixpunkt till f bestämmas med godtyckligt stor noggrannhet. Vidare kan man notera att denna teknik med intervallhalvering kan byggas ut till ett bevis för satsen om mellanliggande värden för kontinuerliga funktioner. Notera att fullständigheten hos $\mathbf{R}$ är viktig. Jämför också detta med Baires sats i övningshäftet.

Vi ska nu studera en snarlik situation till exemplet ovan. Vi betraktar en kontinuerlig funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Skillnaden med fallet ovan är att funktionen är inte längre en avbildning definierat på en kompakt mängd. Men vi söker fortfarande ett $x_0 \in \mathbf{R}$ sådant att $f(x_0) = x_0$. Om vi lägger till en lämplig egenskap för f kan vi visa detta. Låt oss anta att f är en **kontraktion** på $\mathbf{R}$. Med detta menar vi att det finns ett reellt tal $c \in [0,1)$ sådant att

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|, \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

I detta fall kan vi dra slutsatsen att det finns ett entydigt bestämt $x_0 \in \mathbf{R}$ sådant att $f(x_0) = x_0$. Detta är en konsekvens av **Banachs fixpunktssats** vilken vi formulerar nedan.

[2]Om man tydligare vill se parallellen med den fortsatta framställningen kan man anta att

$$f : [0,1] \to [0,1]$$

.

Vi formulerar först i satsform ett par allmänna observationer.

Sats 1: *Låt T vara en kontinuerlig operator på ett Banachrum X. Då gäller:*

1. *Om det för $x, y \in X$ gäller att*

$$\lim_{n\to\infty} T^n(x) = y$$

   så är y en fixpunkt till T, dvs $T(y) = y$.

2. *Om $T(X)$ är en kompakt mängd i X och det för varje $\epsilon > 0$ finns ett $x_\epsilon \in X$ sådant att*

$$\|T(x_\epsilon) - x_\epsilon\| < \epsilon$$

   så finns en fixpunkt $x \in X$ till T, dvs $T(x) = x$.

Bevis: Om T är kontinuerlig och $y_n \equiv T^n(x) \to y$ då $n \to \infty$ så gäller

$$T(y) = T(\lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} T(y_n) = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = y.$$

Detta visar påstående 1).

Antag att förutsättningarna i 2) är uppfyllda. För $n = 1, 2, \ldots$ välj $x_n \in X$ sådana att

$$\|T(x_n) - x_n\| < \frac{1}{n}. \tag{1}$$

Då $T(X)$ är kompakt finns en konvergent delföljd $\{T(x_{n_k})\}$ av $\{T(x_n)\}$. Kalla gränspunkten x. x är en fixpunkt till T ty följden $\{x_{n_k}\}$ konvergerar också mot x enligt (1) och T är kontinuerlig varför $T(x) = x$.

$\diamond$

Vi är nu redo för den första fixpunktssatsen.

Sats 2 (Banachs fixpunktssats): *Låt T vara en kontraktion på ett Banachrum X. Då finns en entydigt bestämd fixpunkt $x_0 \in X$ till T, dvs*

$$T(x_0) = x_0.$$

Bevis: Tag ett godtyckligt z element i X och bilda följden $z_n = T^n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$. Denna följd är en Cauchyföljd. Vi ser nämligen att

$$\|z_n - z_m\| \leq \|z_n - z_{n-1}\| + \ldots + \|z_{m+1} - z_m\| =$$

$$= \|T(z_{n-1}) - T(z_{n-2})\| + \ldots + \|T(z_m) - T(z_{m-1})\| \leq$$

$$\leq c\|z_{n-1} - z_{n-2}\| + \ldots + c\|z_m - z_{m-1}\| \leq \ldots \leq$$

$$\leq (c^{n-1} + c^{n-2} + \ldots c^{m-1})\|z_1 - z\| \leq \frac{c^{m-1}}{1-c}\|z_1 - z\|,$$

där vi antagit att $n > m > 1$. Detta medför att $\|z_n - z_m\| \to 0$ då $n, m \to \infty$. Då X är Banachrum är följden $\{z_n\}$ konvergent, dvs det finns ett $x_0 \in X$ sådant att $z_n \to x_0$ då $n \to \infty$. Här är x_0 en fixpunkt till T eftersom

$$\|T(x_0) - x_0\| \leq \|T(x_0) - T(z_n)\| + \|z_{n+1} - x_0\| \leq c\|x_0 - z_n\| + \|z_{n+1} - x_0\|$$

där vänsterledet oberoende av n och högerledet går mot 0 då $n \to \infty$. Entydigheten är en direkt konsekvens av kontraktionsegenskapen hos T. Antag nämligen att det finns två olika fixpunkter x_0, y_0 till T. Då fås

$$\|x_0 - y_0\| = \|T(x_0) - T(y_0)\| \leq c\|x_0 - y_0\| < \|x_0 - y_0\|$$

vilket ger en motsägelse.

◇

Av beviset och bevistekniken följer att

1. Följden $\{T^n(z)\}$ konvergerar mot den unika fixpunkten **oberoende** av valet av z.

2. För godtyckligt element $x \in X$ gäller $\|x - x_0\| \leq \frac{1}{1-c}\|x - T(x)\|$ då

$$\|x - x_0\| \leq \|x - T(x)\| + \|T(x) - T(x_0)\| \leq \|x - T(x)\| + c\|x - x_0\|.$$

Banachs fixpunktssats kan generaliseras något. Följande gäller.

Sats 3: *Låt T vara en (icke-linjär) operator på ett Banachrum X, sådan att*[3] *T^K är en kontraktion för ett positivt heltal K. Då har T en entydigt bestämd fixpunkt.*

[3] T^K betecknar operatorn man får om man sätter samman T med sig själv K gånger, dvs $T^K = \underbrace{T \circ T \circ \ldots \circ T}_{K \text{ st}}$.

Något antagande om att T är kontinuerlig behövs ej[4].

Bevis: Från Banachs fixpunktssats följer att T^K har en **entydigt** bestämd fixpunkt, kalla den x_0. Vi noterar nu att

$$\|T(x_0) - x_0\| = \|T^K(T(x_0)) - T^K(x_0)\| \leq c\|T(x_0) - x_0\|,$$

varför $T(x_0) = x_0$.

$\diamond$

Vi formulerar nu Brouwers fixpunktssatsen.

Sats 4 (Brouwers fixpunktssats): *Antag att K är en kompakt konvex delmängd i $\mathbf{R}^n$ och att $T : K \to K$ är en kontinuerlig avbildning. Då har T en fixpunkt $x \in K$, dvs $T(x) = x$.*

Exempel 1: Om man lägger en Göteborgskarta på golvet finns det en punkt på kartan, kalla den P, som kommer att sammanfalla med den punkt på golvet vars bildpunkt på kartan är just P. Detta förutsätter givetvis att golvet ifråga ligger i Göteborg. Man kan inse detta både via Banachs fixpunktssats och Brouwers fixpunktssats. Inse detta!

Exempel 2: Låt T vara rotation i planet av en cirkelskiva kring sin medelpunkt. Brouwers fixpunktssats ger existensen av en fixpunkt för T. Här kan man inte använda Banachs fixpunktssats direkt[5] eftersom T ej är en kontraktion. Självklart ser man (utan att blanda in någon fixpunktssats) att medelpunkten är en fixpunkt och att denna är den enda. Men Brouwers fixpunktssats ger även att man inte kan sätta samman rotationen med någon liten kontinuerlig deformation av cirkelskivan på sig själv så att den sammansatta avbildningen saknar fixpunkt.

---

[4] Om man skulle använda kontinuitet hos T för att visa påståendet kan man argumentera som följer: Från Banachs fixpunktssats följer att T^K har en entydigt bestämd fixpunkt, kalla den x_0. Ur beviset framgår att för godtyckligt $z \in X$ gäller

$$\begin{aligned} T^{nK}(z) &\to x_0 \\ T^{nK}(T(z)) &\to x_0 \end{aligned}$$

då $n \to \infty$. Om T är kontinuerlig följer då att

$$T(x_0) = T(\lim_{n\to\infty} T^{nK}(z)) = \lim_{n\to\infty} T^{nK}(T(z)) = x_0.$$

[5] Låt oss för enkelhets skull anta att cirkelskivan har sin medelpunkt i origo. Om man applicerar Banachs fixpunktssats på operatorerna $T_n = (1 - \frac{1}{n})T$ fås en följd av fixpunkter x_n till T_n på cirkelskivan sådana att

$$\|T(x_n) - x_n\| \leq \frac{C}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots ,$$

där C = cirkelskivans radie, varför resultatet följer av sats 1 ovan.

Exempel 3: En fixpunkt, vars existens garanteras av Brouwers fixpunktssats, behöver **inte**, till skillnad från Banachs fixpunktssats, vara entydigt bestämd. Betrakta t.ex. fallet där T ges som identitetsoperatorn på K.

Vi observerar att

- (generalisering av Brouwers fixpunktssats): om det finns en **homeomorfism** (=kontinuerlig bijektion med kontinuerlig inversavbildning) mellan en kompakt konvex mängd K i $\mathbf{R}^n$ och en mängd $\tilde{K}$, kalla homeomorfismen φ, och $\tilde{T} : \tilde{K} \to \tilde{K}$ är en kontiunuerlig avbildning så har $\tilde{T}$ en fixpunkt. Betrakta bara avbildningen $T = \varphi^{-1} \circ \tilde{T} \circ \varphi$.
  Övning: Ge argumentet för existens av fixpunkt till $\tilde{T}$.

- insikteten ovan medför att man kan inskränka beviset av Brouwers fixpunktssats till fallet $K = \bar{B}(0,1)$[6]. Motivera detta påstående.

Det finns många bevis för Brouwers fixpunktssats, både analytiska och topologiska. Vi nöjer oss med en liten skiss av ett bevis: Låt oss **anta att** $K = \bar{B}(0,1)$ och att T **saknar fixpunkt**. Definiera då avbildningen $A : \bar{B}(0,1) \to \bar{B}(0,1)$ enligt följande: För varje inre punkt x i $\bar{B}(0,1)$ låt $\tilde{x}$ beteckna den punkt på randen $\partial B(0,1)$ som är skärningen mellan strålen från $T(x)$ genom x och randen $\partial B(0,1)$. Strålen är alltid väldefinierad då T saknar fixpunkt. Vi sätter nu

$$A(x) = \begin{cases} \tilde{x} & \text{om } x \in B(0,1) \\ x & \text{om } x \in \partial B(0,1) \end{cases}$$

Då gäller att A är en kontinuerlig avbildning från $\bar{B}(0,1)$ till $\partial B(0,1)$ (visa detta!) sådan att $A|_{\partial B(0,1)} = I|_{\partial B(0,1)}$. Att visa att T har en fixpunkt är nu omformulerat till att visa att det inte kan finnas en kontinuerlig avbildning $A : \bar{B}(0,1) \to \partial B(0,1)$ så att $A|_{\partial B(0,1)} = I|_{\partial B(0,1)}$. Att det inte kan finnas en sådan avbildning är ett djupt resultat men inte desto mindre intuitivt klart[7]. Ty tänk på situationen ($n = 2$) att ett elastiskt membran är fast inspänt på en cirkulär ram. Existensen av en avbildning A ovan skulle medföra att membranet kontinuerligt skulle kunna deformeras till att

[6] Vi använder genomgående beteckningarna

$$B(0,1) = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| < 1\}$$

och

$$\bar{B}(0,1) = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| \leq 1\}.$$

Notera att det slutna höljet $\overline{B(0,1)}$ är lika med $\bar{B}(0,1)$.

[7] Ett annat topologiskt resultat med denna karaktär att vara intuitivt klart men svårbevisat är Jordans kurvsats. Denna sats säger att varje enkel (skär sig ej) sluten (slutpunkten=startpunkten) kurva i planet, dvs varje kontinuerlig injektiv avbildning $\gamma : S^1 \to \mathbf{R}^2$, delar upp planet i två sammanhängande komponenter. Här betecknar S^1 mängden $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \|(x,y)\| = 1\}$.

sammanfalla med ramen utan att membranet spricker sönder. För fixt $x \in B(0,1)$ beskriver avbildningen

$$t \mapsto (1-t)x + tA(x), \ t \in [0,1]$$

hur denna punkt rör sig från x, då $t = 0$, till $A(x) \in \partial B(0,1)$, då $t = 1$, under deformationen. Glöm inte att membranet skulle vara fast inspänt på ramen!!!

De tillämpningar av Brouwers fixpunktssats vi presenterar är Perrons sats och Schauders fixpunktssats, det senare resultatet är ett väsentligt hjälpmedel i samband visandet av existens för lösningar till icke-linjära differential/integralekvationer.

Perrons sats kan formuleras på följande sätt: Låt A vara en reell $n \times n$–matris med positiva matriselement. Då finns ett positivt egenvärde till den linjära operatorn given av A, och dess egenvektor har icke-negativa element[8].

Innan vi formulerar och bevisar Schauders fixpunktssats noterar vi att kompakthet av en mängd F i ändligtdimensionellt rum är liktydigt med att F är sluten och begränsad. **Men** Brouwers fixpunktssats kan inte generaliseras till oändligtdimensionella rum med antagandet att mängden K är konvex sluten och begränsad, vilket följande exempel visar.

Exempel: Låt B beteckna den slutna enhetsbollen i $l^2(\mathbf{Z})$, där $l^2(\mathbf{Z})$ består av alla element $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1 \dots)$ sådana att $\|x\| = (\Sigma_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$. Det är klart att B är både konvex och begränsad. Låt z vara det element i $l^2(\mathbf{Z})$ som uppfyller $z_0 = 1$ och $z_n = 0$ för $n \neq 0$ och låt S beteckna skiftoperatorn definierad av $(S(x))_n = x_{n-1}$ för $n \in \mathbf{Z}$. Definiera nu

$$T : l^2(\mathbf{Z}) \to l^2(\mathbf{Z}),$$

där

$$T(x) = S(x) + (1 - \|x\|)z.$$

Det gäller

$$\|T(x)\| \leq \|S(x)\| + (1 - \|x\|) = 1$$

för $x \in B$, dvs $T(x) \in B$. Men T saknar fixpunkt i B ty

$$(T(x))_n = x_{n-1}, \ n \neq 0$$

och

$$(T(x))_0 = x_{-1} + (1 - \|x\|),$$

[8] Bevistips: Låt K vara mängden $\{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \geq 0 \ \text{ alla } i, \ \Sigma_{i=1}^n x_i = 1\}$ och sätt $T(x) = Ax/\|Ax\|_{l^1}$ för $x \in K$.

vilket medför att $x_0 = x_1 = \ldots = x_n = \ldots$ och $x_{-1} = x_{-2} = \ldots = x_{-n} = \ldots$. Detta ger motsägelse då $x \in l^2(\mathbf{Z})$. Varför? Detta motexempel brukar benämnas **Kakutanis motexempel**.

Av exemplet framgår att en generalisering av Brouwers fixpunktssats till oändligt-dimensionella rum bör förutsätta att $T(K)$ är kompakt. Vi formulerar omgående två versioner av Schauders fixpunktssats.

Sats 5 (Schauders fixpunktssats): *Antag att K är en kompakt konvex mängd i ett Banachrum X och att $T : K \to K$ är en kontinuerlig avbildning. Då har T en fixpunkt.*

I tillämpningssammanhang kan följande generalisering av Schauders sats vara användbar.

Sats 6 (generalisering av Schauders fixpunktssats): *Låt F vara en sluten konvex mängd i ett Banachrum och antag att T är en kontinuerlig avbildning på F som tar värden i en relativt kompakt delmängd $K \subset F$. Då har T en fixpunkt.*

Vi noterar att en mängd $K_1 \subset X$ är **kompakt**[9] om varje följd i K_1 har en konvergent delföljd i K_1, medan $K_2 \subset X$ är **relativt kompakt** om varje delföljd i K_2 har en konvergent delföljd i X. I det senare fallet ligger gränspunkten i $\overline{K_2}$. Att K_2 är relativt kompakt medför att $\overline{K_2}$ är kompakt och en godtycklig delmängd av en kompakt mängd är relativt kompakt. Visa detta!

Innan vi tar itu med beviset av Schauders satser formulerar vi några resultat för kompakta mängder. Med det **konvexa höljet** av en mängd F, betecknad $\operatorname{co} F$, menas mängden

$$\bigcap_{F \subset H, H \text{ konvex}} H.$$

Sats 7: *Följande påståenden gäller:*

[9] Den definition av kompakthet och relativ kompakthet som vi har givet här brukar av vissa kallas för sekvenskompakthet respektive relativ sekvenskompakthet. Den definition av kompakthet som då används är följande: En mängd K i ett normerat rum X är kompakt om varje öppen övertäckning har en ändlig delövertäckning. En öppen övertäckning består av en mängd öppna mängder O_λ, $\lambda \in \Lambda$, sådan att $K \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda}$. En ändlig delövertäckning av denna består av en ändlig delmängd av $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ vars union också innehåller mängden K. Man kan visa att för normerade rum X är dessa definitioner ekvivalenta.

1. *En mängd F är relativt kompakt om och endast om den för varje $\epsilon > 0$ har ett ändligt ϵ–nät. [Ett ϵ–nät är en delmängd F_ϵ av F med egenskapen att för varje $x \in F$ finns ett $y \in F_\epsilon$ sådant att $\|x - y\| < \epsilon$.]*

2. *En mängd K är kompakt om och endast om den är sluten och för varje $\epsilon > 0$ har ett ändligt ϵ–nät.*

3. *Mängden $\operatorname{co} F$ är lika med mängden av alla konvexa kombinationer av ändligt många element i F. [En konvexkombination av elementen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ är en linjärkombination $\Sigma_{i=1}^n \lambda_i x_n$, där alla $\lambda_i \geq 0$ och $\Sigma_{i=1}^n \lambda_i = 1$.]*

4. *K kompakt mängd medför att $\operatorname{co} K$ är kompakt.*

Beviset av denna sats lämnas som övning.

Bevis för Schauders fixpunktssatser: Generaliseringen av Schauders fixpunktssats följer av den första satsen enligt följande: Antag att förutsättningarna i den andra satsen är uppfyllda. Då följer att slutna höljet $\overline{R}$ av $R = T(F)$ är kompakt och så även $\operatorname{co} \overline{R}$. Sätt $K = \operatorname{co} \overline{R}$. Då gäller $K \subset F$ eftersom F är sluten och konvex. Dessutom gäller $T : K \to K$ kontinuerlig, varför första Schaudersatsen ger påståendet i den andra Schauderssatsen.

Det återstår nu att bevisa den första Schaudersatsen. Detta kommer att göras på så sätt att den kompakta mängden K approximeras med ändligtdimensionella kompakta mängder K_n, $n = 1, 2, \ldots$ och avbildningen T approximeras med kontinuerliga avbildningar $T_n : K_n \to K_n$, ju bättre approximation ju större n är. Brouwers fixpunktssats ger då en följd $\{x_n\}$ av fixpunkter till följden $\{T_n\}$, ur vilken en konvergent delföljd kan extraheras. Gränspunkten för denna följd kommer att vara en fixpunkt till T.

För ett godtyckligt positivt heltal n definierar vi en operator P_n, kallad en **Schauderprojektion**, enligt följande: Då K kompakt finns ändligt många $x_1, \ldots, x_k \in K$ sådana att

$$K \subset \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \frac{1}{n}).$$

Sätt

$$f_i(x) = \max(0, \frac{1}{n} - \|x - x_i\|), \ i = 1, \ldots, k.$$

För alla $x \in K$ gäller att $f_i(x) > 0$ för något i vilket medför att $\Sigma_{i=1}^k f_i(x) > 0$ för alla $x \in K$. Vi sätter nu $K_n = \operatorname{co}\{x_1, \ldots, x_k\}$ och

$$P_n(x) = \frac{\Sigma_{i=1}^k f_i(x) x_i}{\Sigma_{i=1}^k f_i(x)}, \ \ x \in K.$$

Definiera $T_n = P_n T|_{K_n}$. Nu kan vi applicera Brouwers fixpunktssats på avbildningarna

$$T_n : K_n \to K_n, \ \ n = 1, 2, \ldots$$

Detta ger oss en följd av fixpunkter x_n till T_n. Vi har alltså

$$P_n T(x_n) = x_n,$$

vilket medför att

$$\|T(x_n) - x_n\| < \frac{1}{n}.$$

Schauders sats följer nu av sats 1 ovan.

$\diamond$

För att kunna tillämpa de fixpunktssatser vi diskuterat ovan behöver man ofta följande resultat för kontinuerliga funktioner.

Sats 8: *Antag att T är en kontinuerlig avbildning mellan två Banachrum X och Y. Då gäller följande påståenden:*

1. *Om K är en kompakt mängd i X så är $T(K)$ en kompakt mängd i Y.*
2. *Om $Y = \mathbf{R}$ så antar T sitt största värde och sitt minsta värde på varje kompakt mängd K i X, dvs det finns $x_0, x_1 \in K$ sådana att*

   $$\sup_{x \in K} f(x) = T(x_0) = \max_{x \in K} T(x)$$

   och

   $$\inf_{x \in K} T(x) = T(x_1) = \min_{x \in K} T(x).$$

3. *T är likformigt kontinuerlig på varje kompakt mängd i X.*

De olika kontinuitetsbegreppen som vi använder och kommer att använda är följande: En avbildning $T : X \to Y$ mellan två Banachrum kallas

kontinuerlig om det för varje $x \in X$ och för varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta = \delta(x, \epsilon) > 0$ sådant att för varje $y \in X$ gäller

$$\|y - x\|_X < \delta \Rightarrow \|T(y) - T(x)\|_Y < \epsilon.$$

likformigt kontinuerlig på A , där $A \subset X$, om det för varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sådant att för varje $x, y \in A$ gäller

$$\|y - x\|_X < \delta \Rightarrow \|T(y) - T(x)\|_Y < \epsilon.$$

Om $T_\lambda : X \to Y$, $\lambda \in \Lambda$, är en mängd avbildningar mellan två Banachrum, oändligt många eller ej, kallas dessa avbildningar

ekvikontinuerliga på A , där $A \subset X$, om det om det för varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sådant att för varje $x, y \in A$ och varje $\lambda \in \Lambda$ gäller

$$\|y - x\|_X < \delta \Rightarrow \|T_\lambda(y) - T_\lambda(x)\|_Y < \epsilon.$$

Bevis: Antag att $T : X \to Y$ är kontinuerlig och att K är en kompakt mängd i X. För att visa att $T(K)$ är en kompakt mängd i Y tag en godtycklig följd $\{y_n\} \subset T(K)$. Då finns en följd $\{x_n\}$ i K sådan att $T(x_n) = y_n$ för alla n. Följden $\{x_n\}$ behöver inte vara entydigt bestämd då vi inte förutsatt att T är injektiv. Men då K är kompakt finns en konvergent delföljd $\{x_{n_k}\}$ av $\{x_n\}$ i K, dvs det finns ett $x \in K$ sådant att $x_{n_k} \to x$ då $k \to \infty$. Då T är kontinuerlig gäller att

$$x_{n_k} \to x \Rightarrow y_{n_k} = T(x_{n_k}) \to T(x) \in T(K).$$

Detta visar 1).

Visa 2) som övning.

Antag att $T : X \to Y$ är kontinuerlig men **ej** likformigt kontinuerlig på den kompakta mängden K i X. Då finns ett $\epsilon > 0$ sådant att för varje positivt heltal n finns $x_n, y_n \in K$ sådana att

$$\|y_n - x_n\|_X < \frac{1}{n} \tag{2}$$

men

$$\|T(y_n) - T(x_n)\|_Y \geq \epsilon. \tag{3}$$

Då K är en kompakt mängd finns en konvergent delföljd $\{x_{n_k}\}$ av $\{x_n\}$, dvs för något $x \in K$ gäller $x_{n_k} \to x$. Från (2) följer att $y_{n_k} \to x$ eftersom

$$\|y_{n_k} - x\|_X \leq \|y_{n_k} - x_{n_k}\|_X + \|x_{n_k} - x\|_X.$$

Vidare är T kontinuerlig varför $T(x_{n_k}) \to T(x)$ och $T(y_{n_k}) \to T(x)$. Detta ger en motsägelse mot (3). Påstående 3) är visat.

$\diamond$

De Banachrum som kommer att vara aktuella för oss i tillämpningar är $C(A)$ och $L^p(A)$, $1 \leq p < \infty$. Här är A slutna begränsade/obegränsade mängder i $\mathbf{R}^n$ för $n \geq 1$. Det är då väsentligt att ha kriterier för när delmängder av $C(A)$ respektive $L^p(A)$ är kompakta. Vi börjar med att formulera en klassisk sats i fallet $C(A)$.

Sats 9 (Arzela-Ascolis sats): *Antag att K är en kompakt mängd i $\mathbf{R}^n$, $n \geq 1$ [t.ex. $K = [a, b] \subset \mathbf{R}$]. Då är en mängd $S \subset C(K)$ relativt kompakt i $C(K)$ (med sup-norm) om och endast om funktionerna i S är likformigt begränsade och ekvikontinuerliga på K.*

Att funktionerna i S är likformigt begränsade betyder att det finns ett $M > 0$ sådant att

$$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)| \leq M \quad \text{alla} \;\; f \in S.$$

Att funktionerna i S är ekvikontinuerliga betyder att de är ”likformigt, likformigt kontinuerliga”, mer exakt, för varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att för **varje** $x, y \in K$ och **varje** $f \in S$ gäller

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Arzela-Ascolis sats kan generaliseras till hela $\mathbf{R}^n$ om man utanför en kompakt antar att funktionerna avtar likformigt mot 0 då $\|x\| \to \infty$.

Vi formulerar nu ett kompakthetskriterium för L^p-funktioner.

Sats 10 (Riesz, Kolmogorov): *Antag att $1 \leq p < \infty$ och att $S \subset L^p(\mathbf{R}^n)$. Då är S relativt kompakt i $L^p(\mathbf{R}^n)$ om och endast om*

1. *S är en begränsad mängd i $L^p(\mathbf{R}^n)$, dvs det finns ett $M > 0$ så att $\|f\|_{L^p} \leq M$ för alla $f \in S$,*

2. *$\lim_{x \to 0} \int_{\mathbf{R}^n} |f(y + x) - f(y)|^p \, dy = 0$ likformigt i S, dvs för varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att*

$$|x| < \delta \;\; \text{och} \;\; f \in S \Rightarrow \|f(\cdot + x) - f(\cdot)\| \equiv \left(\int_{\mathbf{R}^n} |f(y + x) - f(y)|^p \, dy\right)^{1/p} < \epsilon,$$

3. *$\lim_{R \to \infty} \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n \setminus B(0,R))} = (\int_{|x|>R} |f(x)|^p \, dx)^{1/p} = 0$ likformigt i S, dvs för varje $\epsilon > 0$ finns ett $\omega > 0$ så att*

$$R > \omega \;\; \text{och} \;\; f \in S \Rightarrow \left(\int_{|x|>R} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} < \epsilon.$$

Vi är nu redo för en tillämpning av Schauders fixpunktssats. Rent allmänt kan vi observera en skillnad mellan då man applicerar Banachs respektive Schauders fixpunktssatser. För att tillämpa Banachsatsen krävs att man kan visa att en operator är tillräckligt liten. I Schauderfaller ska man visa att en operator är kompakt, dvs att bildmängden, om vi nu tänker på operatorer på $C(A)$ eller L^p, består av ”mer reguljära” funktioner.

Exempel på ekvation av Hammerstein-typ: Antag att $K(x,y)$ är en kontinuerlig funktion för $0 \le x, y \le 1$ och att $f(y,z)$ är en kontinuerlig begränsad funktion för $0 \le y \le 1$ och $z \in \mathbf{R}$. Då har ekvationen

$$z(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y, z(y))\, dy \equiv (T(z))(x)$$

en kontinuerlig lösning $z(x)$.

För att visa detta påstående ska vi använda den generellare formuleringen av Schauders sats. Vi ska välja en konvex sluten delmängd $S \subset C([0,1])$ sådan att avbildningen $T : S \to C([0,1])$ är kontinuerlig och bildmängden $T(S)$ är relativt kompakt i $C([0,1])$.

Vi noterar först att T avbildar kontinuerliga funktioner på kontinuerliga funktioner, dvs att

$$T(C([0,1])) \subset C([0,1]).$$

Detta inses på följande sätt: Ur förutsättningarna följer att det finns ett $B > 0$ sådant att

$$|f(y,z)| \le B \quad \text{om} \quad (y,z) \in [0,1] \times \mathbf{R}.$$

Vidare är $K(x,y)$ kontinuerlig på den kompakta mängden $[0,1] \times [0,1]$ varför K är likformigt kontinuerlig på $[0,1] \times [0,1]$. Fixera nu ett $\epsilon > 0$. Då finns ett $\delta > 0$ sådant att

$$|K(x,y) - K(\tilde{x}, \tilde{y})| < \frac{\epsilon}{B} \quad \text{om} \quad |(x,y) - (\tilde{x}, \tilde{y})| < \delta.$$

Följdaktligen gäller för godtyckligt $z \in C([0,1])$ att

$$\begin{aligned} |(T(z))(x) - (T(z))(\tilde{x})| &= |\int_0^1 (K(x,y) - K(\tilde{x},y)) f(y,z(y))\, dy| \le \\ &\le \int_0^1 |K(x,y) - K(\tilde{x},y)||f(y,z(y))|\, dy \le B \int_0^1 |K(x,y) - K(\tilde{x},y)|\, dy < \epsilon \end{aligned}$$

om $|x - \tilde{x}| < \delta$. Detta innebär att $T(z) \in C([0,1])$.

Vidare är ett naturligt val av en konvex sluten mängd S följande:

$$S = \{u \in C([0,1]) : \|u\| \le D\},$$

där $D > 0$ är en konstant som vi väljer så att $T(S) \subset S$. För detta observerar vi att eftersom K är kontinuerlig på kompakten $[0,1] \times [0,1]$ så finns ett $A > 0$ sådant att

$$|K(x,y)| \le A \quad \text{om} \quad (x,y) \in [0,1] \times [0,1].$$

Detta medför att

$$|(T(z))(x)| = |\int_0^1 K(x,y)f(y,z(y))\,dy| \leq \int_0^1 |K(x,y)||f(y,z(y))|\,dy \leq AB.$$

Följdaktligen gäller

$$\|T(z)\| \leq D$$

om vi väljer $D \geq AB$. **Välj** (t.ex.) $D = AB$. Med detta val av S gäller

$$T(S) \subset S.$$

För att applicera Schauders sats krävs att vi visar att $T(S)$ är relativt kompakt i $C([0,1])$ och att T är kontinuerlig på S. Enligt Arzela-Ascoli följer den relativa kompaktheten om vi kan visa att $T(S)$ är likformigt begränsad och ekvikontinuerlig.

Vi har ovan visat att $T(C([0,1]))$ är likformigt begränsad och ekvikontinuerlig, varför det endast återstår att visa att $T : S \to T(S)$ är kontinuerlig. Av definitionen av S följer att $|z(x)| \leq D$ för alla $x \in [0,1]$. Då $f(y,z)$ är kontinuerlig på den kompakta mängden $[0,1] \times [-D,D]$ är den likformigt kontinuerlig där. Fixera ett godtyckligt $\epsilon > 0$. Då finns ett $\delta > 0$ sådant att

$$|f(y,z) - f(\tilde{y},\tilde{z})| < \frac{\epsilon}{A} \quad \text{om} \quad |(y,z) - (\tilde{y},\tilde{z})| < \delta.$$

Följdaktligen gäller för godtyckliga $z_1, z_2 \in S$ att

$$\begin{aligned}
\|T(z_1) - T(z_2)\| &= \sup_{x\in[0,1]} |\int_0^1 K(x,y)(f(y,z_1(y)) - f(y,z_2(y)))\,dy| \leq \\
&\leq \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |K(x,y)||(f(y,z_1(y)) - f(y,z_2(y)))|\,dy \leq \\
&\leq A\int_0^1 |(f(y,z_1(y)) - f(y,z_2(y)))|\,dy < \epsilon.
\end{aligned}$$

Vi har alltså visat att T är kontinuerlig på S. Schauders fixpunktssats ger nu att ekvationen $z = T(z)$ har minst en lösning.

Vi avslutar med ytterligare ett par fixpunktssatser, nämligen Schaefers fixpunktssats och Krasnoselskiis fixpunktssats. Den första är en variant av Schauders sats medan den senare är en blandning av Banachs och Schauders satser.

Sats 11 (Schaefers fixpunktssats): *Antag att X är ett Banachrum och att $T : X \to X$ är en kontinuerlig kompakt*[10] *avbildning. Antag vidare att mängden*

$$\bigcup_{0\leq\lambda\leq 1} \{x \in X : x = \lambda T(x)\}$$

[10] T är en kompakt avbildning on $\{T(x_n)\}$ har en konvergent delföljd för varje begränsad följd $\{x_n\}$ i X.

är begränsad. Då har T en fixpunkt.

Bevis: Antag att avbildningen T uppfyller förutsättningarna i satsen. Välj ett $R > 0$ sådant att

$$x = \lambda T(x) \text{ och } 0 \leq \lambda \leq 1$$

medför

$$\|x\| < R.$$

Definiera avbildningen $\tilde{T} : X \to X$ enligt följande:

$$\tilde{T}(x) = \begin{cases} T(x), & \text{om } \|T(x)\| \leq R \\ \frac{R}{\|T(x)\|}T(x) & \text{om } \|T(x)\| > R \end{cases}$$

Detta medför att $\tilde{T} : X \to X$ är en kompakt operator ty: Tag en begränsad följd $\{x_n\}$ i X. Då finns en delföljd $\{x_{n_k}\}$ sådan att $\|T(x_{n_k})\| < R$ för alla k eller $\|T(x_{n_k})\| \geq R$ för alla k. I det första fallet har $\{\tilde{T}(x_{n_k})\}$ en konvergent delföljd eftersom $\tilde{T}(x_{n_k}) = T(x_{n_k})$ och T är en kompakt avbildning. I det andra fallet gäller att $\{T(x_{n_k})\}$ har en konvergent delföljd, beteckna den $\{T(x_l)\}$ av bekvämlighetsskäl. Men då gäller att också att $\{\|T(x_l)\|\}$ konvergerar (eller hur?), där också $\|T(x_l)\| \geq R$ för alla l. Då konvergerar också $\tilde{T}(x_l) = \frac{R}{\|T(x_l)\|}T(x_l)$.
Sätt nu

$$K = \overline{\mathrm{co}\, \tilde{T}(B(0, R))}.$$

Här är K konvex (eftersom den är det konvexa höljet av en mängd), kompakt (eftersom konvex höljet av en kompakt mängd är kompakt och $\tilde{T}$ är en kompakt avbildning) delmängd av X sådan att

$$\tilde{T} : K \to K.$$

Enligt Schauders fixpunktssats har $\tilde{T}$ en fixpunkt $x_0 \in K$. Men här är x_0 en fixpunkt till T om $\|T(x_0)\| \leq R$. Antag att $\|T(x_0)\| > R$. Då fås en motsägelse eftersom $x_0 = \tilde{T}(x_0) = \lambda T(x_0)$, där $\lambda = \frac{R}{\|T(x_0)\|} \in (0, 1)$, enligt förutsättningarna i satsen skulle ge $\|T(x_0)\| = \|x_0\| < R$. Satsen visad.

◇

Notera speciellt att man för att tillämpa Schaefers sats inte behöver visa att någon viss mängd är konvex och kompakt. Problemet har omformulerats till att visa s.k. **a priori–uppskattningar** för operatorer T.

Sats 12 (Krasnoselskiis fixpunktssats): *Antag att F är en sluten begränsad konvex delmängd av ett Banachrum X. Antag vidare att T_1 och T_2 är avbildningar från F in i X sådana att*

1. *$T_1(x) + T_2(y) \in F$ för alla $x, y \in F$,*

2. *T_1 är en kontraktion,*

3. *T_2 är kompakt och kontinuerlig.*

Då har $T_1 + T_2$ en fixpunkt i F.

Bevis: Antag att avbildningarna T_1, T_2 uppfyller förutsättningarna i satsen. Speciellt finns ett $c \in (0,1)$ sådant att

$$\|T_1(x) - T_1(y)\| \leq c\|x - y\|, \quad x, y \in F.$$

Detta medför att

$$\|(I - T_1)(x) - (I - T_1)(z)\| \geq \|x - z\| - \|T_1(x) - T_1(z)\| \geq (1 - c)\|x - z\|$$

och

$$\|(I - T_1)(x) - (I - T_1)(z)\| \leq \|x - z\| + \|T_1(x) - T_1(z)\| \leq (1 + c)\|x - z\|.$$

Följdaktligen är $I - T_1 : F \to (I - T_1)(F)$ en homeomorfism, så att $(I - T_1)^{-1}$ existerar som kontinuerlig avbildning från $(I - T_1)(F)$. Vidare noterar vi att för varje $y \in F$ har ekvationen

$$x = T_1(x) + T_2(y)$$

en entydigt bestämd lösning i $x \in F$ enligt Banachs fixpunktssats. Av detta följer att $T_2(y) \in (I - T_1)(F)$ för varje $y \in F$ och alltså är $(I - T_1)^{-1}T_2 : F \to F$ en väldefinierad kontinuerlig avbildning. Vidare är T_2 en kompakt avbildning vilket medför att $(I - T_1)^{-1}T_2 : F \to F$ är en kompakt avbildning. Visa detta! Den generellare versionen av Schauders sats ger påståendet i satsen.

$\diamond$

Avslutningsvis rekommenderas den fixpunktsintresserade läsaren att bläddra i Smarts bok [5] där ytterligare material och referenser finns.

References

[1] L.Debnath/P.Mikusinski, *Introduction to Hilbert Spaces with Applications 2nd ed.*, Academic Press 1999

[2] A.Friedman, *Foundations of modern analysis*, Holt Rinehart and Winston, 1970

[3] E.Kreyszig, *Introduction to functional analysis with applications*, Wiley 1989

[4] P.Kumlin, *Lite kompletteringar i Spektralanalys*, Matematik, CTH&GU 2001/2002

[5] D.R.Smart, *Fixed Point Theorems*, Cambridge Univ. Press 1973